181

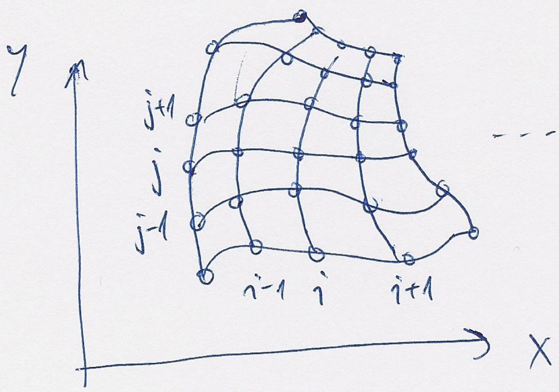
Obecný tvar oblasti řešení ve 2D

Budeme uvažovat rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - p\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{pro}$$

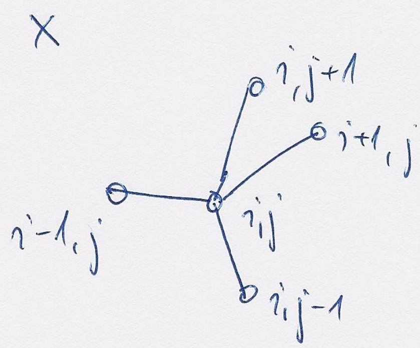
$[x,y] \in G$ a $t \in (0;T)$

Uvažujeme tzv. "body fitted" síť



... oblast G a výpočtová síť

Síť na obrázku je tzv. strukturovaná, tj. body lze označit pomocí dvojice indexů i, j ve dvou nezávislých směrech. Síťové čáry pro i = konst, resp. j = konst. však nejsou rovnoběžné s y, resp. x



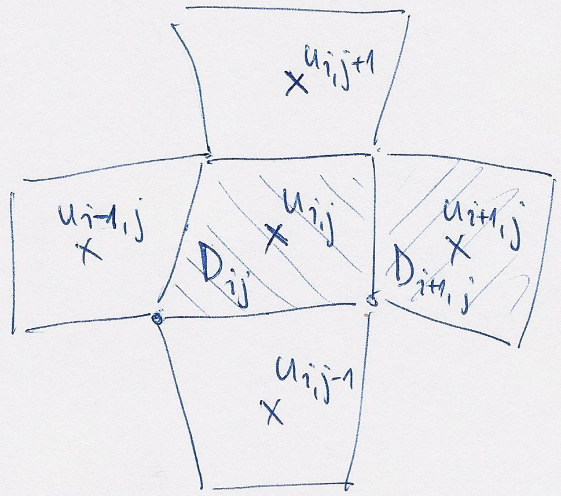
proto např.: $$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \neq \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2},$$

navíc Δx není konstantní

<u>Pozn.:</u> Výše uvedený vzorec lze zobecnit pro nerovnoměrnou křivočarou (po částech lineární) síť pomocí Taylorova rozvoje a derivace ve směru → metoda konečných diferencí.

<u>Pozn.:</u> Jiný přístup k řešení tohoto problému nabízí <u>metoda konečných objemů</u>:

detail sítě



Hodnoty řešení jsou vztaženy ke středům buněk sítě. Výchozí PDR zintegrujeme

přes objem D_{ij} a časový interval $\langle t_n, t_n+\tau \rangle$,
kde τ je časový krok:

$$\int_{t_n}^{t_n+\tau} \iint_{D_{ij}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx\,dy\,dt = 0$$

$$\iint_{D_{ij}} \left(u^{n+1} - u^n \right) dx\,dy = p \int_{t_n}^{t_n+\tau} \iint_{D_{ij}} \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy\,dt$$

kde $u^n = u(x, y, t_n)$

$u^{n+1} = u(x, y, t_n+\tau)$

uvažujeme že $$\iint_{D_{ij}} u\,dx\,dy = \underbrace{\mu(D_{ij})}_{\text{plošný obsah } D_{ij}}\, u_{ij}$$

(viz věta o střední hodnotě)

aplikujeme-li Greenovu větu, pak dostáváme

$$\mu(D_{ij}) \left(u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n \right) = \tau p \oint_{\partial D_{ij}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^n dy - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|^n dx \right)$$

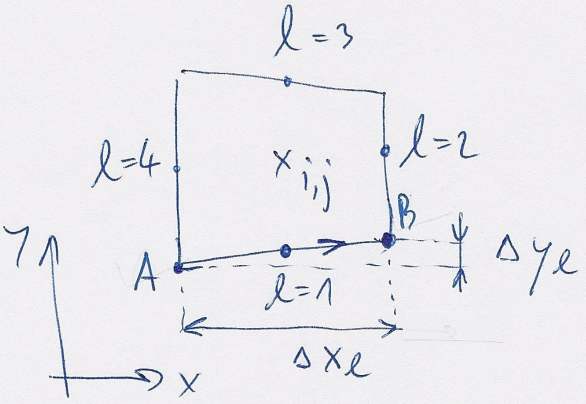
$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \frac{\tau p}{\mu(D_{ij})} \oint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^n dy - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|^n dx \right)$$

184

Integrál na pravé straně aproximujeme součtem

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n} + \frac{\tau p}{\mu(D_{ij})} \sum_{l=1}^{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_l^n \Delta y_l - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_l^n \Delta x_l \right)$$

kde



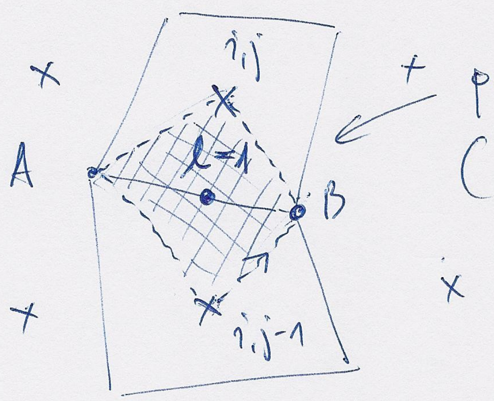
$$\Delta x_1 = x_B - x_A$$
$$\Delta y_1 = y_B - y_A$$

(musíme dodržet kladný směr obíhání ∂D_{ij}, tj. ↺

$\Rightarrow$ "Δx = konec − začátek")

Derivace v bodech $l = 1, 2, 3, 4$ počítáme na pomocném objemu. Ukážeme si výpočet derivací pro $l = 1$:

(185)



← pomocný objem $\tilde{D}_1$

(tzv. diamond cell)

definujeme

$$u_A = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i,j} + u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1} \right)$$

$$u_B = \frac{1}{4}\left(u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} \right)$$

z věty o střední hodnotě:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{l=1} = \frac{1}{\mu(\tilde{D}_1)} \iint_{\tilde{D}_1} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\mu(\tilde{D}_1)} \iint_{\tilde{D}_1} \operatorname{div}(u, 0)\, dx\, dy = \frac{1}{\mu(\tilde{D}_1)} \cdot \oint_{\partial \tilde{D}_1} u\, dy =$$

$$= \frac{1}{\mu(\tilde{D}_1)} \cdot \Bigg[\frac{u_B + u_{i,j-1}}{2} (y_B - y_{i,j-1}) + \frac{u_{i,j} + u_B}{2} (y_{i,j} - y_B) +$$

$$+ \frac{u_A + u_{i,j}}{2} (y_A - y_{i,j}) + \frac{u_{i,j-1} + u_A}{2} (y_{i,j-1} - y_A) \Bigg]$$

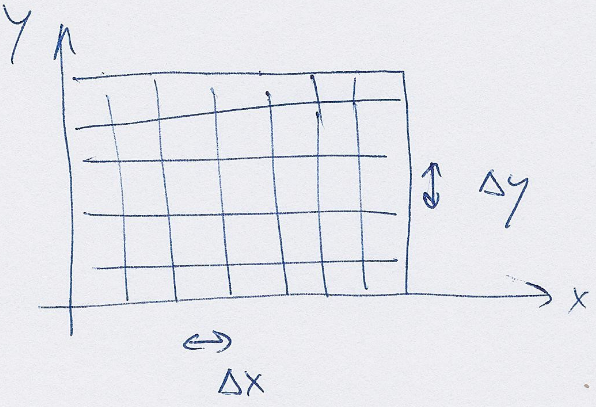
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\ell=1} = -\frac{1}{\mu(\tilde{D}_1)} \oint_{\partial \tilde{D}_1} u \, dx = \dots$$

Derivace pro $\ell = 2, 3, 4$ se počítají analogicky. Výše uvedené schéma odpovídá explicitnímu schématu pro rovnici vedení tepla. Pro určení τ lze užít kritérium odvozené pro rovnoměrnou ortogonální síť a dosadit do něj $\Delta x, \Delta y$ každé buňky a "vzít" minimum z takto vypočtených časových kroků.

Stacionární úlohy – PDR eliptického typu

Uvažujeme okrajovou úlohu pro Poissonovu rovnici $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$ (*) pro každé $[x,y] \in D$ a okrajovou podmínku $u(x,y) = g(x,y)$ pro každé $[x,y] \in \partial D$ (∂D je hranice oblasti D).

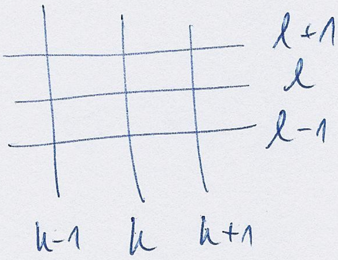
Pro jednoduchost uvažujme obdélníkovou oblast D



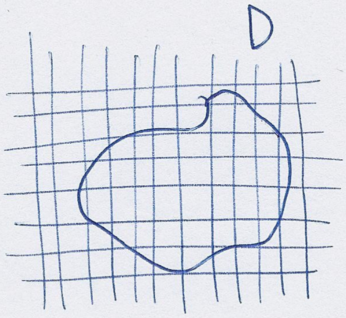
s ortogonální ekvidistantní (Δx a Δy jsou konst.) sítí s kroky $\Delta x, \Delta y$. Diferenciální rovnici (*) aproximujeme diferenční rovnicí

$$(**)\quad \frac{u_{k-1,l} - 2u_{kl} + u_{k+1,l}}{\Delta x^2} + \frac{u_{k,l-1} - 2u_{k,l} + u_{k,l+1}}{\Delta y^2} = f_{k,l}$$

kde



Pozn: V případě obecného tvaru oblasti zavádíme pojmy regulární, neregulární a hraniční uzel (bod) a síť necháváme ortogonální ekvidistantní, viz obr. a předmět Numerická matematika.



Diferenční rovnice (**) pro všechny vnitřní body oblasti D tvoří soustavu lineárních algebraických rovnic:

(189)

$$A_h u_h = f_h,$$

kde A_h je matice $n \times n$ (n je počet vnitřních bodů D) a u_h je vektor n neznámých hodnot u ve vnitřních bodech (body sítě uvnitř D)

Pozn.: Pro úlohu $A_h u_h = f_h$, $u|_{\partial D} = g$ definujeme stabilitu:

nechť $A_h u_h = f_h$, $u|_{\partial D} = g$ je původní úloha

a $A_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$, $\tilde{u}|_{\partial D} = \tilde{g}$ je úloha s poruchou.

Říkáme, že původní úloha je stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\|h\| < h_0$ platí

implikace $\left(\|f_h - \tilde{f}_h\| < \delta \text{ a } \|g - \tilde{g}\| < \delta \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|u_h - \tilde{u}_h\| < \varepsilon.$$

kde h je charakteristický rozměr sítě (např. $\sqrt{\Delta x \cdot \Delta y}$)

(190)

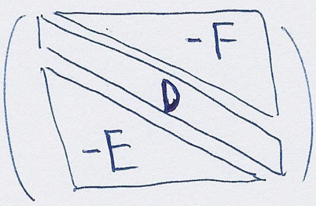
<u>Věta:</u> Diferenční úloha $A_h u_h = f_h$, $u|_{\partial D} = g$ je stabilní, existuje-li konstanta $c > 0$ taková, že $\| u_h \| \leq c \left(\| f_h \| + \| g \| \right)$.

<u>Pozn:</u> Lze ukázat, že diferenční úloha $A_h u_h = f_h$, $u|_{\partial D} = g$ je lineární a platí pro ni $\| u_h \| \leq M_1 \| f_h \| + M_2 \| g \|$.

(tj. c lze volit jako $\max(M_1, M_2)$)

Iterační metody pro řešení soustav lineárních rovnic

Uvažujeme soustavu rovnic $AX = B$, kde A je regulární matice a X je vektor neznámých.
Nechť $A = D - E - F$, kde D je diagonální, $-E$ dolní trojúhelníková a $-F$ horní trojúhelníková matice



např.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 7 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 8\end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -7 & 0 & 0\\ -3 & -2 & 0\end{pmatrix}}_{E} + \underset{D}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & -5\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{F}$$

Můžeme psát

$$AX = \underbrace{(D - E - F)X = B}$$

$$X = D^{-1}(E+F)X + D^{-1}B$$

Pomocí horního indexu označíme u vektoru X iteraci, např.:

- $$X^{n+1} = D^{-1}(E+F)X^n + D^{-1}B, \quad n = 0, 1, \dots$$

(tzv. Jacobiova metoda, někdy též nazývaná prostá iterační metoda)

Je-li spektrální poloměr $\rho(D^{-1}(E+F)) < 1$ (nebo libovolná norma $\| D^{-1}(E+F) \| < 1$), pak je $\lim_{n \to \infty} \| X^n - X^* \| = 0$, kde $AX^* = B$, tj. X^* je přesné řešení. (analogie se str. 140)

- Jiná volba horního indexu a použití relaxace (interpolace nebo extrapolace) vede na relaxační metodu (tzv. SOR - succesive overrelaxation method)

$$\boxed{\begin{aligned} X^{n+1/2} &= D^{-1} E X^{n+1} + D^{-1} F X^{n} + D^{-1} B \\ X^{n+1} &= X^{n} + \omega \left(X^{n+1/2} - X^{n} \right), \quad \omega \in (0; 2) \end{aligned}}$$

Pro $\omega = 1$ se jedná o Gaussovu-Seidelovu metodu.

Oba kroky SOR metody lze zapsat do jedné rovnice: z druhé rovnice vyjádříme

$$X^{n+1/2} = \frac{1}{\omega} \left[X^{n+1} - (1-\omega) X^{n} \right] \quad \text{a}$$

dosadíme do 1. rovnice

$$X^{n+1} - (1-\omega) X^{n} = \omega D^{-1} E X^{n+1} + \omega D^{-1} F X^{n} + \omega D^{-1} B$$

$$(I - \omega D^{-1}) X^{n+1} = \left[-(1-\omega) I + \omega D^{-1} F \right] X^{n} + \omega D^{-1} B$$

kde I je jednotková matice

$$X^{n+1} = \underbrace{(I - \omega D^{-1})^{-1} \left[\omega D^{-1} F - (1-\omega) I \right]}_{=H} X^{n} + (I - \omega D^{-1})^{-1} \omega D^{-1} B$$

SOR metoda konverguje, je-li $\rho(H) < 1$

(nebo $\|H\| < 1$)

<u>Pozn:</u> Je-li matice A bloková, tj. tvořená z $n \times n$ bloků A_{ij}, kde A_{ij} jsou matice typu $N \times N$.

$$A = \begin{pmatrix} & & & \\ & A_{ij} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Opět použijeme rozklad $A = D - E - F$, kde D, E a F budou také blokové matice,

např.
$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Bloková relaxační metoda (SLOR - successive line overrelaxation method)

1. krok metody

$$D X^{n+1/2} = E X^{n+1} + F X^{n} + B$$

řešíme po blocích, tj.

195

$$(1)\quad A_{ii} X_i^{n+1/2} = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{n+1} + \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} X_j^{n} + B_i\,,$$

$i = 1, \dots, n$

a kde
$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \hline X_2 \\ \hline \vdots \\ \hline X_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \\ \hline \vdots \\ \hline B_n \end{pmatrix},$$

X_i a B_i jsou sloupcové vektory o N složkách.
Rovnici (1) řešíme pomocí inverze bloku A_{ii}, takže kompletní metoda je (SLOR)

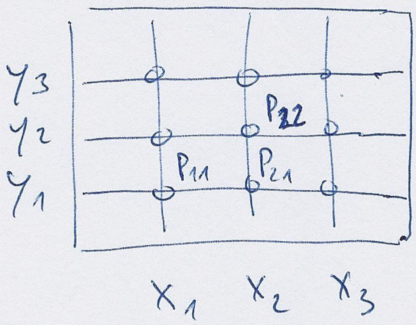
$$\boxed{\begin{aligned} X_i^{n+1/2} &= A_{ii}^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{n+1} + A_{ii}^{-1} \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} X_j^{n} + A_{ii}^{-1} \cdot B_i \\ X_i^{n+1} &= X_i^{n} + \omega \left(X_i^{n+1/2} - X_i^{n} \right), \quad \omega \in (0,2) \end{aligned}}$$

Uvažujme nyní diferenční rovnici pro Poissonovu rovnici $\Delta u = f$:

$$\frac{u_{k-1,\ell} - 2u_{k,\ell} + u_{k+1,\ell}}{\Delta x^2} + \frac{u_{k,\ell-1} - 2u_{k,\ell} + u_{k,\ell+1}}{\Delta y^2} = f_{k,\ell} \qquad (2)$$

196

na síti



kde P_{kl} je bod sítě

neznámé hodnoty $u_{k,l}$ označíme jedním indexem, tj. diferenční rovnice pak dávají soustavu

$$AU = F,$$

kterou lze řešit přímou metodou (Gaussova eliminační metoda) nebo iterační metodou (viz výše). V případě výpočtu iterační metodou není nutné použít výše uvedené vzorečky, ale stačí vhodně označit index iterace v rovnici (2), např.:

Prostá iterační metoda:

$$\boxed{\frac{u^{n}_{k-1,l} - 2u^{n+1}_{k,l} + u^{n}_{k+1,l}}{\Delta x^2} + \frac{u^{n}_{k,l-1} - 2u^{n+1}_{kl} + u^{n}_{k,l+1}}{\Delta y^2} = f_{kl}}$$

Stabilitu lze vyšetřit pomocí spektrálního

(197)

kritéria (dosadíme $u_{kl}^{n} = \lambda^n e^{I(k\alpha + l\beta)}$,

$\alpha, \beta \in \langle 0, 2\pi)$)

Relaxační metoda:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{u_{k-1,l}^{n+1} - 2u_{kl}^{n+1/2} + u_{k+1,l}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{u_{k,l-1}^{n+1} - 2u_{k,l}^{n+1/2} + u_{k,l+1}^{n}}{\Delta y^2} = f_{k,l} \\ u_{kl}^{n+1} = u_{k,l}^{n} + \omega\left(u_{kl}^{n+1/2} - u_{kl}^{n}\right), \ \omega \in (0,2)\end{gathered}}$$

při výpočtu postupujeme postupně přes uzly

$P_{11}, P_{21}, P_{31}, \ldots, P_{k_{max},1}, P_{12}, P_{22}, \ldots, P_{k_{max},2}, \ldots$

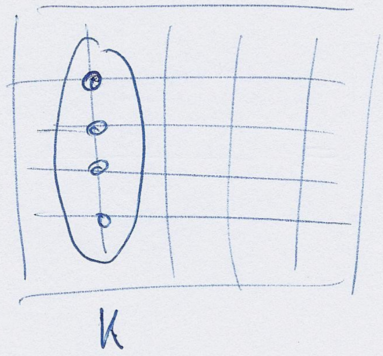
$\ldots, P_{1,l_{max}}, P_{2,l_{max}}, \ldots, P_{k_{max},l_{max}}$

Bloková relaxační metoda:

$$\frac{u_{k-1,l}^{n+1} - 2u_{k,l}^{n+1/2} + u_{k+1,l}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{u_{k,l-1}^{n+1/2} - 2u_{k,l}^{n+1/2} + u_{k,l+1}^{n+1/2}}{\Delta y^2} = f_{k,l}$$

$$u_{kl}^{n+1} = u_{kl}^{n} + \omega\left(u_{k,l}^{n+1/2} - u_{k,l}^{n}\right), \ \omega \in (0,2)$$

tj. vznikne soustava rovnic pro sloupce bodů s třídiagonální maticí (tj. jednoduše řešitelná). Postupně řešíme soustavy pro rostoucí index k



Metoda ustalování

Uvažujeme úlohu

$$
(N)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - f(x,y) \\ \text{pro } \forall\, [x,y] \in D \text{ a } t \in (0;T) \\ \text{a poč. p. } u(x,y,0) = u_0(x,y),\ [x,y] \in \overline{D} \\ \text{a okraj. p. } u(x,y,t) = g(x,y),\ [x,y] \in \partial D, \\ \qquad t \in \langle 0;T\rangle \end{cases}
$$

Úlohu (N) řešíme diferenčním schématem

$$\frac{u_{kl}^{n+1} - u_{kl}^{n}}{\tau} = a^2(\delta_{xx} + \delta_{yy})\, u_{kl}^{n} - f_{kl} \quad \text{(ND)}$$

$$\left(\text{kde } \delta_{xx} u_{kl}^{n} = \frac{u_{k-1,l}^{n} - 2u_{kl}^{n} + u_{k+1,l}^{n}}{\Delta x^2}, \ldots \right)$$

Jediné stacionární ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$) řešení úlohy (N) je řešení úlohy

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 \Delta u = f \quad \text{na } D \\ u(x,y) = g(x,y) \text{ na } \partial D \end{array}}$$

Diferenční schéma (ND) je řádu $O(\tau, \Delta x^2, \Delta y^2)$ vzhledem k (N). Stacionární řešení dostaneme pro $t \to \infty$ při použití stabilního schématu a stacionárních okrajových podmínek (tzv. metoda ustalování).

<u>Pozn.:</u> Prostou iterační metodu lze chápat i jako metodu ustalování:

$$\frac{u^n_{k-1,l} - 2u^{n+1}_{k,l} + u^n_{k+1,l}}{\Delta x^2} + \frac{u^n_{k,l-1} - 2u^{n+1}_{k,l} + u^n_{k,l+1}}{\Delta y^2} = f_{k,l}$$

lze zapsat jako

$$\delta_{xx} u^n_{k,l} + \frac{2}{\Delta x^2}\left(u^n_{kl} - u^{n+1}_{kl}\right) + \delta_{yy} u^n_{k,l} + $$

$$+ \frac{2}{\Delta y^2}\left(u^n_{kl} - u^{n+1}_{kl}\right) = f_{k,l}$$

$$\left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)\left(u^{n+1}_{kl} - u^n_{kl}\right) = \left(\delta_{xx} + \delta_{yy}\right) u^n_{kl} - f_{kl}$$

$$\varepsilon \, \frac{u^{n+1}_{kl} - u^n_{kl}}{\tau} = \left(\delta_{xx} + \delta_{yy}\right) u^n_{kl} - f_{kl} \, ,$$

kde $\varepsilon = \tau \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)$

$\Rightarrow$ Prostá iterační metoda vlastně řeší rovnici

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - f \, ,$$

kde t je tzv. umělý (iterační) čas.

Podobně můžeme zapsat i relaxační a blokovou relaxační metodu.