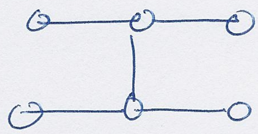
bude oblast závislosti numerické metody také nekonečná.

Př.: Implicitní metoda pro rovnici vedení tepla má stencil



n+1

$\Rightarrow$ na řešení v (n+1)-ní časové vrstvě mají vliv všechny hodnoty z n-té vrstvy

$\Rightarrow$ CFL podmínka je splněna pro libovolnou kombinaci h a τ.

164

Schémata pro rovnici vedení tepla ve 2D (2 prostorové proměnné)

Uvažujme následující úlohu pro neznámou funkci $u = u(x,y,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \text{ pro } \forall\, [x,y,t] \in$$

$$\in G = (0, L_x) \times (0, L_y) \times (0, T)$$

s počáteční podmínkou

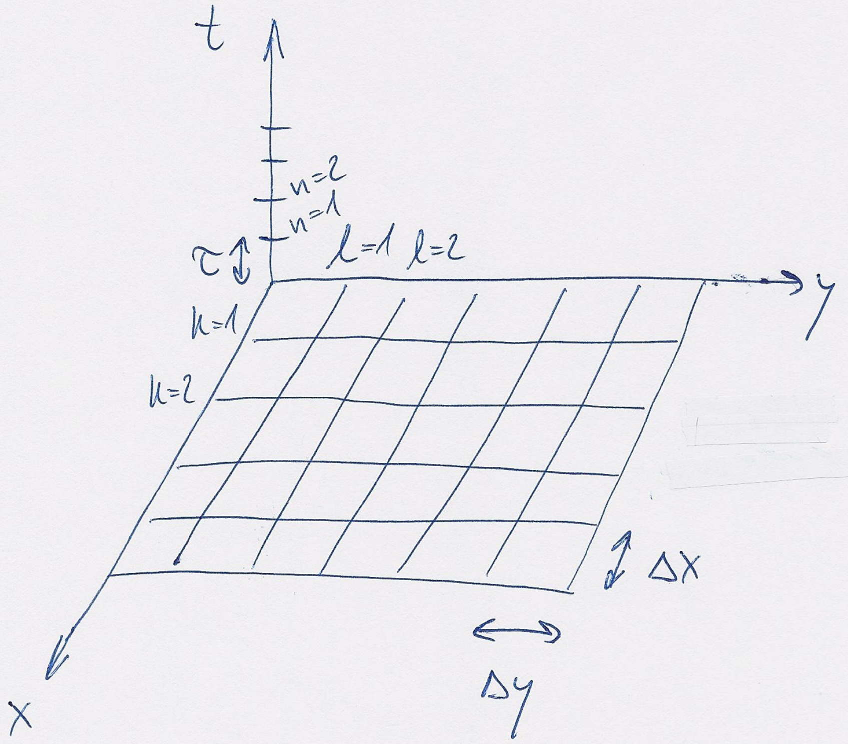
$$u(x,y,0) = u_0(x,y) \text{ pro } \forall\, [x,y] \in G_{xy} = (0, L_x) \times (0, L_y)$$

a okrajovou podmínkou

$$u(x,y,t) = \varphi(x,y) \text{ pro } \forall\, [x,y] \in \sigma G_{xy} \text{ a } t \in \langle 0, T \rangle$$

Metoda sítí:

V rovině xy uvažujme síť s uzly $[x_k, y_l, t_n]$, kde $x_k = k \cdot \Delta x$, $y_l = l \cdot \Delta y$ a $t_n = \tau \cdot n$, kde Δx, Δy a τ jsou kroky sítě ve směru os x, y a t.



Explicitní schéma: všechny derivace nahradíme v bodě $[x_k, y_l, t_n]$:

$$\frac{u_{kl}^{n+1} - u_{kl}^{n}}{\tau} = p\left(\frac{u_{k-1,l}^{n} - 2u_{kl}^{n} + u_{k+1,l}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{u_{k,l-1}^{n} - 2u_{k,l}^{n} + u_{k,l+1}^{n}}{\Delta y^2}\right)$$

Pozn: Spektrální kritérium pro vyšetření stability lze rozšířit i pro 2D případy, kde se dosadí

166

$$u_{k,l}^n = \lambda^n \cdot e^{I(k\alpha + l\beta)}, \quad \alpha, \beta \in \langle 0, 2\pi)$$

a opět požadujeme aby pro $\forall$ a,b platilo $|\lambda| \leq 1$.

<u>Př:</u> Vyšetřete stabilitu explicitního schématu pro 2D rovnici vedení tepla pomocí spektrálního kritéria.

dosadíme $u_{k,l}^n = \lambda^n e^{Ik\alpha} \cdot e^{Il\beta}$

a dostáváme

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{Ik\alpha} e^{Il\beta} - \lambda^n e^{Ik\alpha} e^{Il\beta}}{\tau} = p \cdot \lambda^n e^{Ik\alpha} e^{Il\beta} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{e^{-I\alpha} - 2 + e^{I\alpha}}{\Delta x^2} + \frac{e^{-I\beta} - 2 + e^{I\beta}}{\Delta y^2} \right)$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = 2p \left(\frac{\cos\alpha - 1}{\Delta x^2} + \frac{\cos\beta - 1}{\Delta y^2} \right)$$

$$|\lambda| = \left| 2p\tau \left(\frac{\cos\alpha - 1}{\Delta x^2} + \frac{\cos\beta - 1}{\Delta y^2} \right) + 1 \right| \leq 1$$

167

$$-1 \leq 2p\tau\left(\frac{\cos\alpha - 1}{\Delta x^2} + \frac{\cos\beta - 1}{\Delta y^2}\right) + 1 \leq 1$$

$$\vdots$$

$$1 \geq p\tau\left(\frac{1-\cos\alpha}{\Delta x^2} + \frac{1-\cos\beta}{\Delta y^2}\right) \geq 0$$

víme, že $(1-\cos\alpha) \in \langle 0;2\rangle$

a $(1-\cos\beta) \in \langle 0;2\rangle$

"Nejméně příznivý" je případ pro $(1-\cos\alpha) =$

$= (1-\cos\beta) = 2$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{1 \geq 2p\tau\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)} \geq 0$$

platí vždy

$$p\tau\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

Semiimplicitní schéma

např. explicitní ve směru x a implicitní ve směru y

(168)

$$\frac{u_{k\ell}^{n+1}-u_{k\ell}^{n}}{\tau} = p\cdot\left(\frac{u_{k-1,\ell}^{n}-2u_{k,\ell}^{n}+u_{k+1,\ell}^{n}}{\Delta x^2}+\frac{u_{k,\ell-1}^{n+1}-2u_{k,\ell}^{n+1}+u_{k,\ell+1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right)$$

Vyšetříme stabilitu tohoto schématu, dosadíme opět $u_{k,\ell}^{n} = \lambda^n \cdot e^{I(k\alpha+\ell\beta)}$

$\vdots$

$$\frac{\lambda-1}{\tau} = 2p\,\frac{\cos\alpha-1}{\Delta x^2} + 2p\lambda\,\frac{\cos\beta-1}{\Delta y^2}$$

$$\lambda-1 = 2\underbrace{\frac{p\tau}{\Delta x^2}}_{=\sigma_x}(\cos\alpha-1) + 2\underbrace{\frac{p\tau}{\Delta y^2}}_{=\sigma_y}(\cos\beta-1)$$

$$\lambda\left(1-2\sigma_y(\cos\beta-1)\right) = 2\sigma_x(\cos\alpha-1)+1$$

$$\lambda = \frac{1+2\sigma_x(\cos\alpha-1)}{1-2\sigma_y(\cos\beta-1)}$$

$$|\lambda| \leq 1$$

$$\left|1+2\sigma_x(\cos\alpha-1)\right| \leq \underbrace{1-2\sigma_y(\cos\beta-1)}_{\text{vždy kladné, protože } (\cos\beta-1)\in\langle-2;0\rangle}$$

169

$$-1+2\sigma_y(\cos\beta-1) \le 1+2\sigma_x(\cos\alpha-1) \le 1-2\sigma_y(\cos\beta-1)$$

$$-2+2\sigma_y(\cos\beta-1) \le \underbrace{\underbrace{2\sigma_x(\cos\alpha-1)}_{\le 0} \le \underbrace{-2\sigma_y(\cos\beta-1)}_{\ge 0}}_{\Rightarrow \text{ platí vždy}}$$

zbývá tato nerovnost

$$-1+\sigma_y(\cos\beta-1) \le \sigma_x(\cos\alpha-1) \quad \Big|\cdot(-1)$$

$$1+\sigma_y\underbrace{(1-\cos\beta)}_{\in\langle 0;2\rangle} \ge \sigma_x\underbrace{(1-\cos\alpha)}_{\in\langle 0;2\rangle}$$

"Nejhorší varianta" je $1-\cos\beta=0$ a $1-\cos\alpha=2$

$$\Rightarrow \quad 1 \ge 2\sigma_x$$

$$\sigma_x \le \frac{1}{2}$$

Pozn.: Semiimplicitní schéma je 1. řádu přesnosti v čase a 2. řádu v prostoru (v x-ové i y-ové souřadnici).

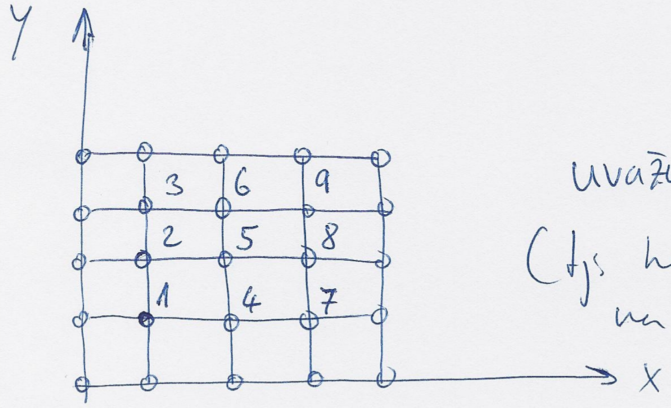
V každém kroku (přechod z t_n na t_{n+1})

řešíme třídiagonální soustavu algebraických rovnic:

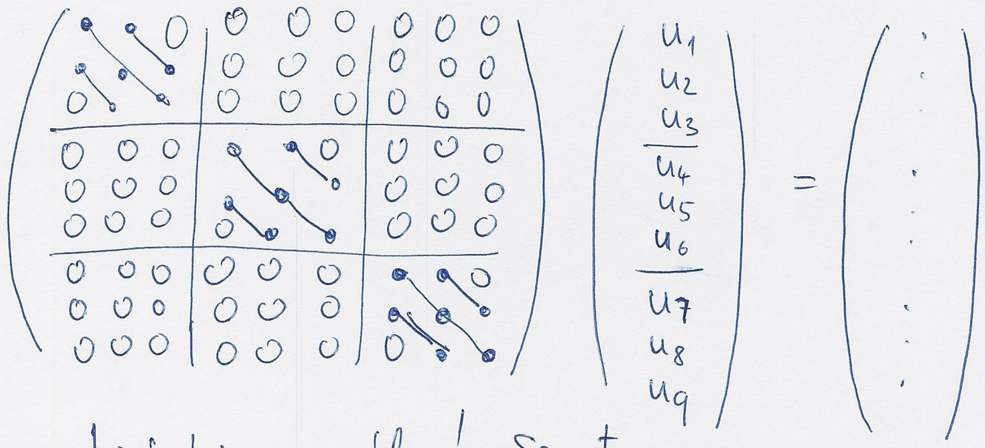
schéma lze zapsat

$$-\sigma_y u_{k,l-1}^{n+1} + (1+2\sigma_y)\, u_{k,l}^{n+1} - \sigma_y u_{k,l+1}^{n+1} = \dots\dots$$

tj. např. pro síť



uvažujeme Dirichletovu OP (tj. hodnoty v bodech na hranici G_{xy} jsou známy)



třídiagonální soustava

171

Implicitní Crank - Nicholsonovo schéma

Toto schéma je nepodmíněně stabilní, vede však na soustava s pětidiagonální maticí.

Zavedeme operátory

$$\delta_{xx} u_{k,l} = \frac{u_{k-1,l} - 2u_{k,l} + u_{k+1,l}}{\Delta x^2}$$

a $$\delta_{yy} u_{k,l} = \frac{u_{k,l-1} - 2u_{k,l} + u_{k,l+1}}{\Delta y^2}$$

Crank-Nicholsonovo schéma pak lze zapsat jako

$$\frac{u_{kl}^{n+1} - u_{kl}^{n}}{\tau} = \frac{p}{2}\left(\delta_{xx} u_{kl}^{n+1} + \delta_{xx} u_{kl}^{n}\right) + \frac{p}{2}\left(\delta_{yy} u_{kl}^{n+1} + \delta_{yy} u_{kl}^{n}\right)$$

$$\left(1-\frac{p\tau}{2}\delta_{xx}-\frac{p\tau}{2}\delta_{yy}\right)u_{kl}^{n+1}=\underbrace{\left(1+\frac{p\tau}{2}\delta_{xx}+\frac{p\tau}{2}\delta_{yy}\right)u_{kl}^{n}}_{=R(u_{kl}^{n})}$$

Lze ukázat, že je možné levou stranu zapsat jako (tzv. faktorizace)

$$\left(1-\frac{p\tau}{2}\delta_{xx}\right)\cdot\left(1-\frac{p\tau}{2}\delta_{yy}\right)u_{kl}=$$

$$=\left(1-\frac{p\tau}{2}\delta_{xx}-\frac{p\tau}{2}\delta_{yy}+\frac{p^2\tau^2}{4}\delta_{xx}\delta_{yy}\right)u_{kl}=$$

$$=\left(1-\frac{p\tau}{2}\delta_{xx}-\frac{p\tau}{2}\delta_{yy}\right)u_{kl}+O(\tau^2)$$

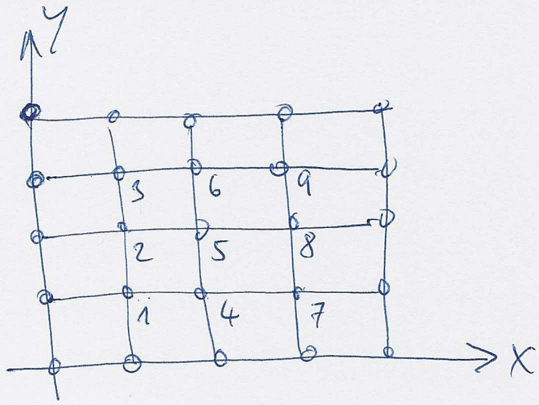
$\Rightarrow$ faktorizací se dopouštíme chyby $O(\tau^2)$, to je chyba stejného řádu jako chyba aproximace u Crank-Nicholsonovy metody.

Takže můžeme psát

$$\left(1-\frac{p\tau}{2}\delta_{xx}\right)\left(1-\frac{p\tau}{2}\delta_{yy}\right)u_{kl}^{n+1}=R(u_{kl}^{n})$$

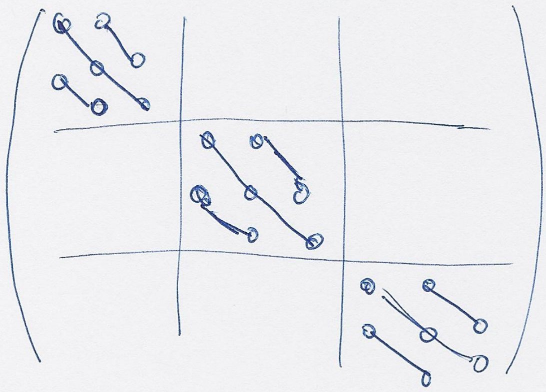
maticový zápis $\quad A\cdot B\cdot U^{n+1}=R(U^n)$, $\quad (*)$

kde např. pro síť

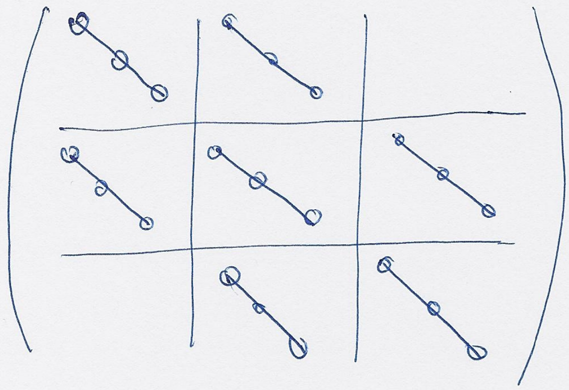


$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}$$

$B =$



$A =$



Označíme $V = B \cdot U^{n+1}$, pak soustavu $(*)$ řešíme ve dvou krocích

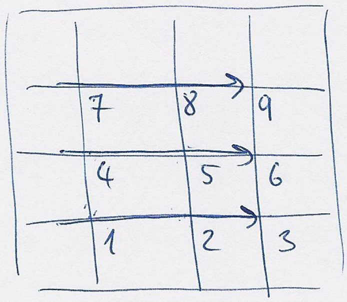
1) $A \cdot V = R(U^n)$ $\rightarrow$ řešení V

2) $B U^{n+1} = V$ $\rightarrow$ řešení U^{n+1}

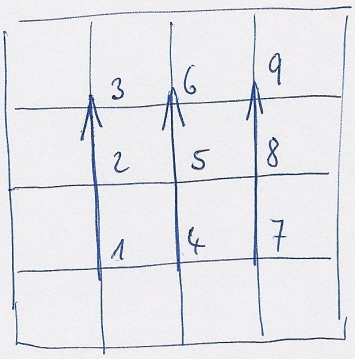
Metodu lze zapsat jako

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1) & \left(1-\frac{p\tau}{2}\delta_{xx}\right) u_{ke}^{n+1/2} = R(u_{ke}^{n}) \\ 2) & \left(1-\frac{p\tau}{2}\delta_{yy}\right) u_{ke}^{n+1} = u_{ke}^{n+1/2} \end{array}}$$

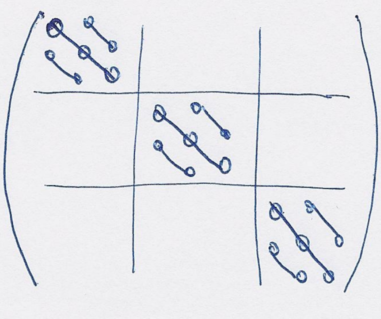
kde v 1. kroku číslujeme uzly ve směru x



a v 2. kroku číslujeme uzly ve směru y



abychom v obou krocích řešili soustavu s třídiagonální maticí



Metoda částečných kroků (fractional step method)

Obecný princip:

Uvažujeme evoluční rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_1 u + L_2 u \,,$$ kde L_1, L_2 jsou diferenciální operátory nezávislé na t.

Cauchyovu úlohu $\frac{\partial u}{\partial t} = L_1 u + L_2 u$, $u(t=0) = u_0$ aproximujeme úlohou

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = L_1 \tilde{u} \,, \quad \tilde{u}(t=0) = u_0$$

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}}{\partial t} = L_2 \tilde{\tilde{u}} \,, \quad \tilde{\tilde{u}}(t=0) = \tilde{u}(\tau)$$

a platí $u(\tau) = \tilde{\tilde{u}}(\tau) + O(\tau)$

tzv. splitting error

Existuje přesnější metoda symetrického rozkladu (Strang):

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = L_1 \tilde{u}, \quad \tilde{u}(t=0) = u_0$$

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}}{\partial t} = L_2 \tilde{\tilde{u}}, \quad \tilde{\tilde{u}}(t=0) = \tilde{u}\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{\tilde{u}}}}{\partial t} = L_1 \tilde{\tilde{\tilde{u}}}, \quad \tilde{\tilde{\tilde{u}}}(t=0) = \tilde{\tilde{u}}(\tau)$$

a platí, že $u(\tau) = \tilde{\tilde{\tilde{u}}}\left(\frac{\tau}{2}\right) + O(\tau^2)$ za předpokladu, že operátory L_1 a L_2 komutují, tj. že platí $L_1 L_2 = L_2 L_1$

Využití metody částečných kroků

1) Vícedimenzionální úlohu řešíme jako několik 1D úloh, např. 2D rovnici vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

řešíme postupně jako

177

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = p \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}, \quad \tilde{u}(x,y,t_n) = u(x,y,t_n)$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial \tilde{\tilde{u}}}{\partial t} = p \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{u}}}{\partial y^2}, \quad \tilde{\tilde{u}}(x,y,t_n) = \tilde{u}(x,y,t_n+\tau)$$

$$u(x,y,t_{n+1}) = \tilde{\tilde{u}}(x,y,t_n+\tau)$$

Použijeme-li pro řešení obou kroků (i) a (ii) Crank–Nicholsonovu metodu, dostáváme metodu ve tvaru

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{1. krok:} & \tilde{u}_{ke} - u_{ke}^{n} = \frac{p\tau}{2}\left(\delta_{xx} u_{ke}^{n} + \delta_{xx} \tilde{u}_{ke}\right) \\ \text{2. krok:} & u_{ke}^{n+1} - \tilde{u}_{ke} = \frac{p\tau}{2}\left(\delta_{yy} \tilde{u}_{ke} + \delta_{yy} u_{ke}^{n+1}\right) \end{array}}$$

Pozn.: Na podobném principu je založena metoda střídavých směrů (ADI method, 1955 Douglas, Peaceman, Rachford), která má zápis

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{u}_{ke} = u_{ke}^{n} + \frac{p\tau}{2}\left(\delta_{xx} \tilde{u}_{ke} + \delta_{yy} u_{ke}^{n}\right) \\ u_{ke}^{n+1} = \tilde{u}_{ke} + \frac{p\tau}{2}\left(\delta_{xx} \tilde{u}_{ke} + \delta_{yy} u_{ke}^{n+1}\right) \end{array}}$$

Vidíme, že ADI metoda je vlastně také metoda částečných kroků, kdy rovnice jsou v obou krocích stejné $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = p \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right)$, ale v každém kroku se používá jiná semiimplicitní metoda s časovým krokem $\frac{\tau}{2}$ (nejdříve implicitní v x a pak v y).

<u>Stabilita ADI metody:</u> po dosazení 1. rovnice do 2. a $u^n_{kl} = \lambda^n e^{I(k\alpha + l\beta)}$ dostáváme

$$\vdots$$

$$|\lambda| = \left| \frac{1 + \frac{1}{2} 2 \sigma_x (\cos\alpha - 1)}{1 - \frac{1}{2} 2 \sigma_y (\cos\beta - 1)} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \sigma_y (\cos\beta - 1)}{1 - \frac{1}{2} \cdot 2 (\cos\alpha - 1)} \right| =$$

$$= \underbrace{\left| \frac{1 + \sigma_y (\cos\beta - 1)}{1 - \sigma_y (\cos\beta - 1)} \right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left| \frac{1 + \sigma_x (\cos\alpha - 1)}{1 - \sigma_x (\cos\alpha - 1)} \right|}_{\leq 1} \leq 1$$

$\Rightarrow$ ADI metoda je nepodmíněně stabilní a lze ukázat, že je 2. řádu v prostoru i čase.

179

2) Úlohu rozdělíme na několik kroků podle „fyzikálního významu":

2.1) Navierovy-Stokesovy rovnice, tj. rovnice typu
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{-a\frac{\partial u}{\partial x}}_{L_1 u} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{L_2 u}$$

→ 1. krok $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -a\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ (metoda konečných objemů)

2. krok $\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{u}}}{\partial x^2}$ (např. metoda konečných prvků)

2.2) rovnice konvekce + reakce
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{-a\frac{\partial u}{\partial x}}_{L_1 u} + \underbrace{\lambda u}_{L_2 u}$$

→ 1. krok $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -a\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ (např. metoda konečných objemů)

180

2\. krok $\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}}{\partial t} = \lambda \tilde{\tilde{u}}$ (ODR)

(ve 2. kroku je možné použít více kroků num. metody pro ODR, např. N a volit tak časový krok $\frac{\tau}{N}$, kde τ je čas. krok z 1. kroku.
$\frac{\tau}{N}$ volíme tak, abychom se přiblížili k časovému měřítku reakce.)