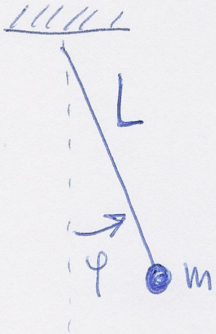
(1)

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Motivace: Uvažujeme rovnici

$$\varphi''(t) = -\frac{g}{L}\sin(\varphi(t)),$$

která popisuje časový průběh výchylky $\varphi(t)$ matematického kyvadla



Jedná se o nelineární obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu. Pro účely numerického řešení ji převedeme na soustavu ODR 1. řádu pomocí substituce:

$$u_1(t) = \varphi(t)$$

$$u_2(t) = \varphi'(t)$$

(2)

pak můžeme psát

$$u_1'(t) = u_2(t)$$

$$u_2'(t) = -\frac{g}{L}\sin(u_1(t))$$

nebo vektorově

$$U'(t) = F(t, U) \quad , \quad \text{kde}$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} , \quad F(t, U) = \begin{pmatrix} f_1(t, u_1, u_2) \\ f_2(t, u_1, u_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_2(t) \\ -\frac{g^m}{L}\sin(u_1(t)) \end{pmatrix}$$

Dále se budeme zabývat pouze 1 rovnicí (resp. soustavou 1. řádu), které lze obecně zapsat jako

$$u'(t) = f(t, u) \qquad (a)$$

respektive $U(t) = F(t, U)$. (b)

③

Vidíme, že zápis jedné ODR 1. řádu (a) je formálně totožný se zápisem soustavy (b), stejně tomu bude i u "vzorečků" jednotlivých metod. Proto budeme dále uvažovat pouze 1 rovnici

$$\underline{u'(t) = f(t, u(t))}, \qquad (1)$$

pro kterou budeme hledat řešení $u(t)$, $t \in \langle t_0, t_0+T \rangle$, $T>0$, které vyhovuje tzv. počáteční podmínce $\underline{u(t_0) = u_0}$.

(tzv. <u>počáteční</u> nebo též <u>Cauchyova úloha</u>)

<u>Pozn:</u> V předmětu NMA byla pro rovnici 2. řádu definována i okrajová úloha.

<u>Def:</u> <u>Cauchyova úloha:</u>

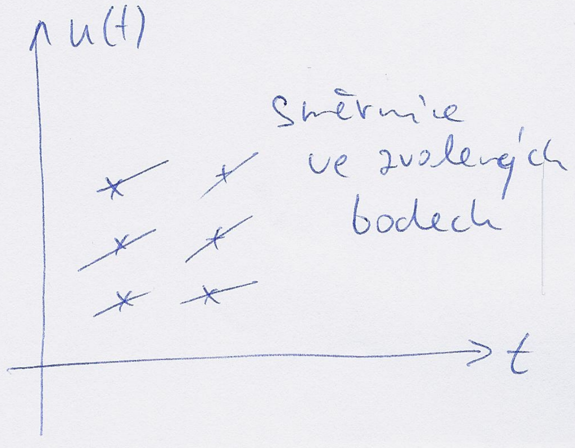
$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) \quad \text{pro } t > t_0, \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \qquad (CÚ)$$

④

Věta: Úloha (CÚ) má právě jedno řešení pro libovolné $[t_0, u_0] \in G$, je-li funkce $f(t,u)$ stejnoměrně Lipschitzovská vzhledem k proměnné u v oblasti $G \subset E_2$, tj. že
$\exists\, L>0,\ \forall [t,u], [t,v] \in G:$
$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq L \cdot |u-v|$$

Pozn: Je-li $f(t,u)$ stejnoměrně Lipschitzovská vzhledem k u, pak "malá změna" u vyvolá pouze "malou změnu" $f(t,u)$.

Pozn: Hodnota $f(t,u)$ má význam směrnice tečny ke grafu řešení $u(t)$, protože $u' = f$, tj.



5

Konstanta L není vždy snadné najít, pomůže nám následující věta:

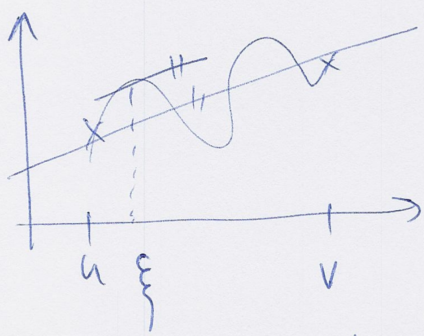
<u>Věta:</u> Má-li $f(t,u)$ v oblasti G omezenou derivaci podle u, pak je $f(t,u)$ stejnoměrně Lipschitzovská v G vzhledem k u a konstanta L je dána jako

$$L = \max_{[t,u]\in G} \left| \frac{\partial f}{\partial u}(t,u) \right|$$

<u>Důkaz:</u> Zvolíme libovolné pevné t, u, v.

Podle Lagrangeovy věty existuje takové ξ mezi u a v, že platí

$$f(t,u) = f(t,v) + \frac{\partial f}{\partial u}(t,\xi)\cdot(u-v)$$



(omezenost $\frac{\partial f}{\partial u}$ nám zaručí existenci ξ)

pak $$\left|f(t,u) - f(t,v)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial u}(t,\xi)\right|\cdot|u-v| \leq L|u-v|$$

$\square$

(6)

<u>Pozn.</u> V předmětu MA3 a NMA jsme pro existenci a jednoznačnost řešení CÚ požadovali spojitost $f(t,u)$ a $\frac{\partial f}{\partial u}$ na G.

<u>Pozn.:</u> Pro systém n-rovnic 1. řádu

$$U'(t) = F(t,U)\ ,\ U(t_0) = U_0 \qquad (S)$$

lze vyslovit analogickou větu

<u>Věta:</u> Cauchyova úloha (S) má právě jedno řešení pro libovolné $[t_0, U_0] \in G \subset E_{n+1}$, je-li funkce $F(t,U)$ stejnoměrně Lipschitzovská vzhledem k U v normě $\|\cdot\|$ na oblasti G, tj. že

$$\exists\, L>0,\ \forall\, [t,U]\in G,\ [t,V]\in G\ ;$$

$$\| F(t,U) - F(t,V)\| \leq L \,\| U-V\| .$$

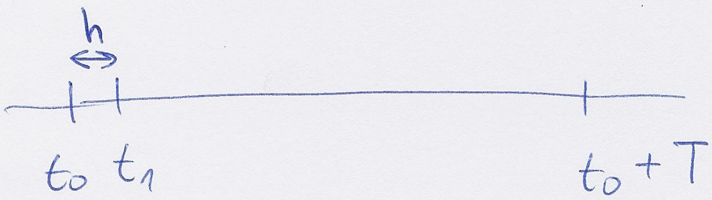
Příklady numerických metod

Uvažujeme CÚ

$$u'(t) = f(t, u) \quad , \quad u(t_0) = u_0$$

Hledáme řešení $u(t)$ pro $t \in \langle t_0, t_0 + T \rangle$.

Interval $\langle t_0, t_0 + T \rangle$ rozdělíme s krokem h na N dílů



kde $h = \dfrac{T}{N}$, označíme $t_n = t_0 + n \cdot h$,

$n = 0, \dots, N$

dále budeme psát $u^n = u(t_n)$.

$f_n = f(t_n, u^n)$

Jednokrokové metody

1) Eulerova metoda (dopředná Eulerova metoda)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = f_n$$

8

2) zpětná Eulerova metoda

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f_{n+1}$$

3) Crankova-Nicholsonova metoda

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = \frac{1}{2}\left(f_n + f_{n+1}\right)$$

4) 1. modifikace Eulerovy metody

$$\left[\begin{array}{l} u^{n+1} = u^n + \frac{h}{2}\left(K_1 + K_2\right) \\ K_1 = f_n \\ K_2 = f\left(t_n + h,\ u^n + hK_1\right) \end{array}\right]$$

5) Heunova metoda

$$u^{n+1} = u^n + h\, f\left(t + \frac{h}{2},\ u^n + \frac{h}{2} f_n\right)$$

9

Vícekrokové metody:

6) Leapfrog metoda

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2h} = f_n \rightarrow u^{n+1} = u^{n-1} + 2h f_n$$

7) BDF 2 kroková (Backward Differencing Formula ...)

$$\frac{3u^{n+1} - 4u^{n} + u^{n-1}}{2h} = f_{n+1}$$

8) Simpsonova metoda

$$u^{n+1} = u^{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}\right)$$

Pozn.: rozdělení metod

- jednokrokové (u^{n+1} závisí pouze na u^n)
- vícekrokové (u^{n+1} závisí na více předchozích $u^n, u^{n-1}, \ldots$)

(10)

explicitní (u^{n+1} lze ze vzorečku vypočítat "rovnou")

implicitní (pro výpočet u^{n+1} je třeba řešit rovnici $u^{n+1} = \Phi(u^{n+1})$ např. Newtonovou metodou apod.)

jednokroková metoda : ⊕ možnost změny kroku h

⊕ jednoduchost

⊖ ~~méně přesné než~~ pro vyšší přesnost je nutné několikrát vyčíslit f

vícekroková metoda : ⊖ obtížná změna velikosti kroku

⊖ výpočet "startovacích" hodnot

⊕ vysoká přesnost

⊕ v každém kroku pouze 1 výpočet f

explicitní metoda: ⊕ jednoduchost

⊖ problém se stabilitou, tj. velikost h je omezena

implicitní metoda: ⊖ složitost, řešíme $u^{n+1} = \phi(u^{n+1})$ v každém kroku

⊕ stabilní, tj. nejsme omezeni ~~vol~~ při volbě h (z pohledu stability)