111

Autonomní dynamické systémy druhého řádu

Soustava
$$\dot{x} = P(x,y)$$
$$\dot{y} = Q(x,y)$$
je tzv. <u>autonomní dynamický systém 2. řádu</u>

jestliže funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ a Jacobiova matice

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$ jsou

spojité v nějaké oblasti $G \subset E_2$. Každým bodem G pak prochází právě jedna fázová trajektorie (křivka v rovině xy).

<u>Pozn:</u> (<u>nepovinné</u>) matice J pochází z linearizace

rovnici $\dot{x} = P(x,y)$ linearizujeme v bodě $[x_0, y_0]$

$$\dot{x} = P(x_0,y_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \text{"chyba"}$$

pro rovnici $\dot{y} = Q(x,y)$ postupujeme analogicky po úpravě dostáváme

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{= J(x_0,y_0)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

<u>Př:</u> Je dána nelineární autonomní soustava

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\sin x$$

a) Spočtěte Jacobiovu matici pravých stran a ukažte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna fázová trajektorie soustavy.

b) Určete všechny body rovnováhy.

c) Určete rovnici fázové trajektorie procházející bodem $M = [\frac{\pi}{2}, 0]$ (včetně orientace).

---

a) $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = -\sin x$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}$$

(113)

P, Q, J spojité v E_2 $\Rightarrow$ každým bodem fázové roviny (rovina xy) prochází právě 1 fáz. trajektorie

b) v bodech rovnováhy musí platit $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$

$$\Rightarrow \quad 0 = y$$
$$0 = -\sin x \longrightarrow x = k \cdot \pi$$

body rovnováhy jsou $[k\pi, 0]$, k je celé číslo

c)
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y$$
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = -\sin x$$

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sin x}$$

$$-\int \sin x \, dx = \int y \, dy$$ ... tzv. první integrál

$$\cos x + c = \frac{y^2}{2}$$

dosadíme bod $\left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$$\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + c = \frac{0^2}{2} \Rightarrow c = 0$$

114

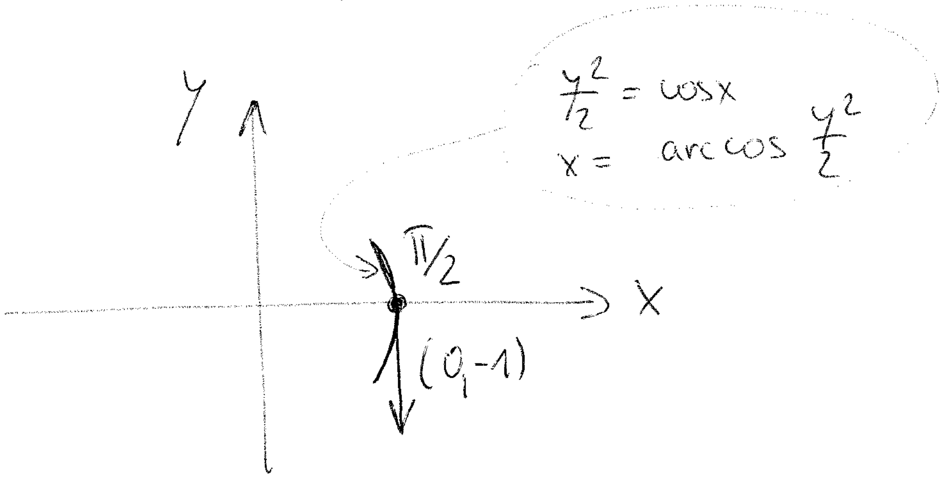
rovnice trajektorie procházející bodem $[\frac{\pi}{2}, 0]$

je $$\underline{y^2 = 2\cos x}$$

orientace pomocí tečného vektoru

$(\dot{x}, \dot{y}) = (y, -\sin x)$ v bodě $[\frac{\pi}{2}, 0]$ je

tečný vektor $= (0, -1)$



115

Př.: Nelineární systém je dán diferenciální rovnicí $\ddot{x} + x^3 - x = 0$.

a) převeďte danou rovnici na soustavu prvního řádu v normálním tvaru.

b) určete všechny body rovnováhy daného systému.

c) určete první integrál a rovnici fázové trajektorie procházející bodem $M = [-1; 1]$.

---

a) substituce $\begin{array}{l} x = x \\ y = \dot{x} \end{array}$ „staré proměnné"

„nové" proměnné

$\rightarrow$ soustava $\dot{x} = y$

$$\dot{y} = \ddot{x} = x - x^3$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{array}} \qquad \begin{array}{l} P(x,y) = y \\ Q(x,y) = x - x^3 \end{array}$$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

P, Q, J spojité v E_2

(116) → je to autonomní systém v $\mathbb{E}_2$

b)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= 0 = y \\ \dot{y} &= 0 = x - x^3 \end{aligned}}$$

$$x - x^3 = x(1-x^2) = \underbrace{x(1-x)(1+x) = 0}_{x=0,\ x=\pm 1}$$

⇒ tři body rovnováhy $[-1;0]$, $[0,0]$, $[1,0]$.

c)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = x - x^3$$

$$\cancel{\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x-x^3}} \qquad x - x^3 = 0 \text{ pro } x = -1$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{x-x^3}{y}}$$

první integrál ---- $\int y\,dy = \int (x-x^3)\,dx$

117

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$$

dosadíme $[-1;1]$

$$\cancel{\frac{1}{2}} = \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{4}$$

$$y^2 = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2}$$

(v okolí $[-1;1]$ lze psát

$$y = + \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2}}$$

)

(118)

Př: Je dán nelineární systém

$$\dot{x} = 2y\,(x^2+4)\ ,\quad \dot{y} = x\,(y^2+1)$$

a) Určete Jacobiovu matici systému a ukažte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna fázová trajektorie.

b) Určete body rovnováhy daného systému.

c) Určete první integrál daného systému. Napište rovnici fázové trajektorie procházející bodem $M = [0,1]$.

---

a) $P(x,y) = 2y\,(x^2+4)\ ,\quad Q(x,y) = x\,(y^2+1)$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy & 2(x^2+4) \\ y^2+1 & 2xy \end{pmatrix}$$

P, Q, J jsou spojité v $\mathbb{E}_2$ $\Rightarrow$ každým bodem fázové roviny ($\mathbb{E}_2$) prochází právě 1 fáz. tr.

119

b) $\dot{x} = 0 = 2y \underbrace{(x^2+4)}_{>0} \Rightarrow y = 0$

$\dot{y} = 0 = x \underbrace{(y^2+1)}_{>0} \Rightarrow x = 0$

jediný bod rovnováhy $[0,0]$

c) $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2y(x^2+4)$

$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = x(y^2+1)$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{x(y^2+1)}{2y(x^2+4)}$$

$$\int \frac{2y}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$$ .. první integrále

$$\ln|y^2+1| = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \ln c$$

$$\ln(y^2+1) = \ln\left[c\sqrt{x^2+4}\right]$$

$$y^2+1 = c\sqrt{x^2+4}$$

(120)

do rovnice $y^2+1 = c\sqrt{x^2+4}$

dosadíme bod $M = [0,1]$

$$1^2+1 = c\sqrt{0^2+4}$$

$$2 = c \cdot 2 \Rightarrow c = 1$$

Fázová trajektorie je $y^2+1 = \sqrt{x^2+4}$