Matematika 2
Plošný integrál
Příklady z Moodle

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

14. května 2020

Kužel ve válci

Vypočítejte integrál

$$\iint_\sigma \frac{x^2 - y^2}{z^3} \mathrm{d}p$$

kde plocha σ je část kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, uvnitř rotační válcové plochy $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

- Začněme parametrizací plochy σ:

$$\begin{aligned} P(u,v) &= [u\cos v, u\sin v, u] \\ P_u(u,v) &= (\cos v, \sin v, 1) \\ P_v(u,v) &= (-u\sin v, u\cos v, 0) \\ P_u \times P_v &= (-u\cos v, -u\sin v, u) \\ \|P_u \times P_v\| &= \sqrt{2}u \end{aligned}$$

- Rozsahy pro parametry u a v zatím psát nebudeme (viz dále)
- Příklad 622 ve skriptech je zadán podobně, ale používá jinou parametrizaci – sami si zkuste představit, jak příšerně by s ní vypadal tento příklad

- Přidejme omezující podmínku na vnitřek válce $(x^2 + 2x + y^2 = 0)$:

$$(x+1)^2 + y^2 \leq 1$$

- ...v parametrizaci $P(u, v) = [u\cos v, u\sin v, u]$ pak dostáváme:

$$\left(u^2\cos^2 v + 2u\cos v + 1\right) + u^2\sin^2 v \leq 1$$

$$u^2 \leq -2u\cos v$$

- ...a z podmínky $z \geq 0$:

$$0 \leq u \leq -2\cos v$$

- ...odkud navíc dostáváme meze pro v (jinde výše uvedený výraz nedává smysl, jelikož hledáme podinterval $\langle 0, 2\pi\rangle$, kde je $-2\cos v \geq 0$, tj. $\cos v \leq 0$):

$$v \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$$

- Jak je to s naší parametrizací? Jedná se o jednoduchou hladkou plochu? Proč?
- Nyní převeďme integrovanou funkci do proměnných parametrizace $P(u,v) = [u\cos v, u\sin v, u]$:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 - y^2}{z^3}$$

$$f(P(u,v)) = \frac{u^2\cos^2 v - u^2\sin^2 v}{u^3} = \frac{\cos^2 v - \sin^2 v}{u}$$

- Shrňme si před samotnou integrací důležité výsledky:

$$\|P_u \times P_v\| = \sqrt{2}u$$

$$f(P(u,v)) = \frac{\cos^2 v - \sin^2 v}{u}$$

$$B : \begin{cases} 0 \leq u \leq -2\cos v \\ v \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle \end{cases}$$

- Dosazujeme do:

$$I = \iint_\sigma f(x,y,z)\mathrm{d}p = \iint_B f(P(u,v))\|P_u \times P_v\| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{-2\cos v} \frac{\cos^2 v - \sin^2 v}{u} \sqrt{2}u \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

- Nakonec můžeme spočítat integrál:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{-2\cos v} \frac{\cos^2 v - \sin^2 v}{\cancel{u}} \sqrt{2}\cancel{u}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[\int_0^{-2\cos v} \left(\cos^2 v - \sin^2 v\right) \mathrm{d}u \right] \mathrm{d}v \\
&= -2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\cos^3 v - \cos v \sin^2 v\right) \mathrm{d}v \\
&= -2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\cos^2 v - \sin^2 v\right) \cos v \, \mathrm{d}v \\
&= -2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 v - \sin^2 v\right) \cos v \, \mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

- Integrál spočítáme například pomocí substituce $\sin v = t$, $\cos v \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}v$, $t_1 = \sin \frac{\pi}{2}$ = -1, $t_2 = \sin \frac{3\pi}{2} = +1$

$$I = -2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 - 2\sin^2 v\right) \cos v \, \mathrm{d}v$$

$$= -2\sqrt{2} \int_{+1}^{-1} \left(1 - 2t^2\right) \, \mathrm{d}t = +2\sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \left(1 - 2t^2\right) \, \mathrm{d}t$$

$$= 2\sqrt{2} \left[t - \frac{2t^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = 2\sqrt{2} \left[\left(1 - \frac{2}{3}\right) - \left(-1 - \frac{-2}{3}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2} \, \frac{(3-2) + (3-2)}{3} = 2\sqrt{2} \, \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{2}}{3}}} \approx 1.8856$$

Elipsoid

Vypočítejte integrál funkce $f = z$ na ploše σ, která je povrchem části elipsoidu $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

- Začněme opět parametrizací plochy σ (ve které pro první oktant $u \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, $v \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$):

$$
\begin{aligned}
P(u,v) &= [a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v] \\
P_u(u,v) &= (-a\sin u\cos v, b\cos u\cos v, 0) \\
P_v(u,v) &= (-a\cos u\sin v, -b\sin u\sin v, c\cos v) \\
P_u \times P_v &= \big(bc\cos u\cos^2 v, ac\sin u\cos^2 v, \\
&\quad ab\sin^2 u\sin v\cos v + ab\,\cos^2 u\sin v\cos v\big) \\
\|P_u \times P_v\|^2 &= b^2c^2\cos^2 u\cos^4 v + a^2c^2\sin^2 u\cos^4 v + \\
&\quad + a^2b^2\left(\sin^4 u\sin^2 v\cos^2 v + \right. \\
&\quad \left. + 2\sin^2 u\cos^2 u\sin^2 v\cos^2 v + \cos^4 u\sin^2 v\cos^2 v\right) \\
&= b^2c^2\cos^2 u\cos^4 v + a^2c^2\sin^2 u\cos^4 v + \\
&\quad + a^2b^2\sin^2 v\cos^2 v\left(\sin^2 u\sin^2 u + \right. \\
&\quad \left. + \sin^2 u\cos^2 u + \sin^2 u\cos^2 u + \cos^4 u\right)
\end{aligned}
$$

- Dále upravujme (začneme opsáním posledního kroku):

$$\begin{aligned}\|P_u \times P_v\|^2 &= b^2c^2\cos^2 u\cos^4 v + a^2c^2\sin^2 u\cos^4 v +\\ &+ a^2b^2\sin^2 v\cos^2 v\left(\sin^2 u\,\sin^2 u +\right.\\ &\left.+\sin^2 u\,\cos^2 u + \sin^2 u\cos^2 u + \cos^2 u\cos^2 u\right)\\ &= b^2c^2\cos^2 u\cos^4 v + a^2c^2\sin^2 u\cos^4 v +\\ &+ a^2b^2\sin^2 v\cos^2 v\left(\sin^2 u\,\underbrace{\left[\sin^2 u + \cos^2 u\right]}_{=1} +\right.\\ &\left. + \cos^2 u\,\underbrace{\left[\sin^2 u + \cos^2 u\right]}_{=1}\right)\end{aligned}$$

- Jelikož celá závorka na konci je rovna 1, dostáváme:

$$\begin{aligned}\|P_u \times P_v\|^2 &= b^2c^2\cos^2 u\cos^4 v + a^2c^2\sin^2 u\cos^4 v +\\ &+ a^2b^2\sin^2 v\cos^2 v\end{aligned}$$

- Z $4x^2 + 4y^2 + z = 16$ dostaneme:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$$

- ... a tedy $a = 2$, $b = 2$, $c = 4$, což dosadíme do

$$\|P_u \times P_v\|^2 = b^2c^2 \cos^2 u \cos^4 v + a^2c^2 \sin^2 u \cos^4 v + \\ + a^2b^2 \sin^2 v \cos^2 v$$

- a získáme

$$\begin{aligned}\|P_u \times P_v\|^2 &= 64 \cos^2 u \cos^4 v + 64 \sin^2 u \cos^4 v + \\ &+ 16 \sin^2 v \cos^2 v \\ &= 16 \cos^2 v \\ &\quad \left(4 \cos^2 u \cos^2 v + 4 \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v\right) \\ &= 16 \cos^2 v \left(4 \cos^2 v + \sin^2 v\right) \\ &= 4^2 \cos^2 v \left(1 + 3 \cos^2 v\right)\end{aligned}$$

- Po odmocnění:

$$\begin{aligned}\|P_u \times P_v\| &= \sqrt{4^2 \cos^2 v \left(1 + 3\cos^2 v\right)}\\ &= 4|\cos v|\sqrt{1 + 3\cos^2 v}\end{aligned}$$

- ... a pro $v \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nakonec:

$$\|P_u \times P_v\| = 4\cos v\sqrt{1 + 3\cos^2 v}$$

- Zopakujme si, co máme:

$$P(u,v) = [a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v]$$
$$a = 2,\ b = 2,\ c = 4$$
$$u \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,\ v \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$
$$\|P_u \times P_v\| = 4\cos v\sqrt{1 + 3\cos^2 v}$$
$$f(x,y,z) = z, \quad f(P(u,v)) = 4\sin v$$

- A konečně samotný integrál:

$$I = \iint_\sigma f(x,y,z)\mathrm{d}p = \iint_B f(P(u,v))\|P_u \times P_v\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin v\, 4\cos v\sqrt{1 + 3\cos^2 v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

- Integrujeme dále:

$$I = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v \; \cos v \sqrt{1 + 3\cos^2 v}\, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

- Pak můžeme použít substituci, např. $t = \cos t$ (vede na integrál typu $\int t\sqrt{1+3t^2}\mathrm{d}t$), pak $h = 1 + 3t^2$ (vede na integrál typu $\int \sqrt{h}\, \mathrm{d}h$), a nakonec dostaneme:

$$I = \frac{56\pi}{9} \approx 19.5477$$

Koule leze z válce

Vypočítejte integrál funkce $f = \frac{z}{x^2+y^2}$ na části kulové plochy σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$, vně rotační válcové plochy $x^2 + y^2 = 1$.

- Parametrizace připomíná předchozí příklad:

$$P = [3\cos u \cos v, 3\sin u \cos v, 3\sin v]$$

$$\|P_u \times P_v\| = 9\cos v$$

- Z podmínky na vnějšek válcové plochy $(x^2 + y^2 = 1)$:

$$9\cos^2 \geq 1 \Rightarrow 3\cos v \geq 1$$

- A celkově pro u a v máme:

$$1 \geq \cos v \geq \frac{1}{3},\ u \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

- V integrálu máme

$$f\,\mathrm{d}p = \frac{3\sin v}{9\cos^2 v} 9\cos v \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

- Řešme zadaný integrál (ozn. I) substitucí $\cos v = t$:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{-3}{t} = -3 \cdot 2\pi \ln \frac{1}{3}$$

$$I = 6\pi \ln 3 \approx \underline{\underline{20.7084}}$$

Koule

Vypočítejte integrál I funkce $f = y$ na části kulové plochy σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ v prvním oktantu.

- Parametrizace opět obdobně:

$$P = [2\cos u \cos v, 2\sin u \cos v, 2\sin v], \ \|P_u \times P_v\| = 4\cos v$$

- A tedy:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin u \cos v \, 4\cos v \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v \mathrm{d}v$$

$$I = 2\pi \approx \underline{\underline{6.2832}}$$

Roviny (1)

Vypočítejte integrál I funkce $f = (x + y + z)$ na části roviny σ: $x + 2y + 3z = 6$ v prvním oktantu.

- Parametrizace např.:

$$P = [6 - 2u - 3v, u, v]\,,\ 0 \leq u \leq \frac{6 - 3v}{2},\ v \in \langle 0, 2\rangle$$

$$\|P_u \times P_v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

- A celkem:

$$I = \int_0^2 \int_0^{\frac{6-3v}{2}} (6 - 2u - 3v + u + v)\sqrt{14}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$I = \frac{\sqrt{14}}{2} \int_0^2 \left(27 - 21v + \frac{15}{4}v^2\right) \mathrm{d}v$$

$$I = 11\sqrt{14} \approx \underline{\underline{41.1582}}$$

Roviny (2)

Vypočítejte integrál I funkce $f = x$ na části roviny σ: $2x + 3z = 6$, $y \leq 7$, v prvním oktantu.

- Parametrizace např.:

$$P = \left[u, v, 2 - \frac{2}{3}u\right], \; \|P_u \times P_v\| = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

- A celkem:

$$I = \frac{\sqrt{13}}{3} \int_0^7 \int_0^3 u \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \frac{21\sqrt{13}}{2} \approx \underline{\underline{37.8583}}$$

Roviny (3)

Vypočítejte integrál I funkce $f = x$ na části roviny σ: $3x + 4z = 1$, $y \leq 2$, v prvním oktantu.

- Parametrizace např.:

$$P = \left[u, v, \frac{1-3u}{4}\right], \ \|P_u \times P_v\| = \frac{5}{4}$$

- A celkem:

$$I = \frac{5}{4} \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{3}} u \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \frac{5}{36} \approx \underline{\underline{0.13889}}$$

Roviny (4)

Vypočítejte integrál I funkce $f = x + y$ na části roviny σ: $x + y + 4z = 4$, v prvním oktantu.

- Parametrizace např.:

$$P = \left[u, v, 1 - \frac{u+v}{4}\right], \ \|P_u \times P_v\| = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

- A celkem:

$$I = \frac{3\sqrt{2}}{4} \int_0^4 \int_0^{4-v} (u+v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{3\sqrt{2}}{4} \int_0^4 \left(8 - \frac{v^2}{2}\right) \mathrm{d}v$$

$$I = 18\sqrt{2} \approx \underline{\underline{22.6274}}$$

Paraboloidy (1)

Vypočítejte integrál I funkce $f = \sqrt{1+4z}$ na části plochy rotačního paraboloidu σ: $z = x^2 + y^2$ omezeného rovinou $z = 4$.

- Parametrizace:

$$P = \left[u\cos v, u\sin v, u^2\right], \ \|P_u \times P_v\| = u\sqrt{4u^2+1}$$

- A pak:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^2 u\left(1+4u^2\right)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\pi\left[\frac{u^2}{2} + \frac{4u^4}{4}\right]_0^2$$

$$I = 36\pi \approx \underline{\underline{113.0973}}$$

Paraboloidy (2)

Vypočítejte integrál I funkce $f = 3x^2 + 3y^2$ na části plochy rotačního paraboloidu σ: $2z = x^2 + y^2$ omezeného válcovou plochou $x^2 + y^2 = 3$.

- $f = 3r^2$:

$$I = 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r^3\sqrt{r^2+1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = 3\pi\int_1^{10}(t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

$$I = \frac{116}{5}\pi \approx \underline{\underline{72.8849}}$$

Paraboloidy (3)

Vypočítejte integrál I funkce $f = \frac{1}{\sqrt{1+4z}}$ na části plochy rotačního paraboloidu σ: $z = x^2 + y^2$ omezeného válcovou plochou $x^2 + y^2 = 2x$.

- Parametrizace:

$$P = \left[u \cos v, u \sin v, u^2\right], \ \|P_u \times P_v\| = u\sqrt{4u^2+1}$$

- Meze – viz začátek tohoto dokumentu:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{-2\cos v} \frac{u\sqrt{4u^2+1}}{\sqrt{1+4u^2}} \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^2 v}{2} \, \mathrm{d}v$$

$$I = \pi \approx \underline{\underline{3.1416}}$$

Paraboloidy (4)

Vypočítejte integrál I funkce $f = (4x^2 + 2y^2)$ na části plochy rotačního paraboloidu σ: $3z = x^2 + y^2$ omezeného válcovou plochou $x^2 + y^2 = 1$.

- Parametrizace:

$$P = \left[u\cos v, u\sin v, \frac{u^2}{3} \right], \ \|P_u \times P_v\| = u\sqrt{\frac{4}{9}u^2 + 1}$$

- Integrujeme:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\cos^2 v + 1\right) 2u^2 u \sqrt{\frac{4}{9}u^2 + 1}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$I = 6\pi \int_0^1 u^3 \sqrt{\frac{4}{9}u^2 + 1} = \frac{81 - 13\sqrt{13}}{20}\pi \approx \underline{\underline{5.3608}}$$

Kužely (1)

Vypočítejte integrál I funkce $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ na části kuželové plochy σ: $z^2 = x^2 + y^2$, $-2 \leq z \leq 0$.

- Parametrizace:

$$P = [u \cos v, u \sin v, -u], \ \|P_u \times P_v\| = \sqrt{2}u$$

- Integrujeme:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{0} \sqrt{2}u^2 \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi \approx \underline{\underline{23.6954}}$$

Kužely (2)

Vypočítejte integrál I funkce $f = xy$ na části kuželové plochy σ: $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 9$.

- Parametrizace:

$$P = [u\cos v, u\sin v, u]\,,\ \|P_u \times P_v\| = \sqrt{2}u$$

- Integrujeme:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^9 \sqrt{2}u^3 \cos v \sin v \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$I = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos v \sin v \,\mathrm{d}v \int_0^9 u^3 \,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\cdot 0 \cdot \int_0^9 u^3 \,\mathrm{d}u = \underline{\underline{0}}$$

Kužely (3)

Vypočítejte integrál I funkce $f = z$ na části kuželové plochy σ: $z^2 = x^2 + y^2$, $1 \leq z \leq 2$.

- Parametrizace:

$$P = [u\cos v, u\sin v, u]\,,\ \|P_u \times P_v\| = \sqrt{2}u$$

- Integrujeme:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{2}u^2 \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi \approx \underline{\underline{20.7335}}$$