Matematika 2
Implicitní funkce

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

19. března 2020

Tvar derivace y=f(x) zad. impl.

$$F(x, y) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = F_x + F_y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\Rightarrow y'' = (y')' = \left(-\frac{F_x}{F_y}\right)'$$

- Doporučuji také kouknout na str. 45 ve skriptech a zopakovat si větu I.7.2 (bez ní se teď neobejdeme).

Příklad

$$F(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy - 9\ln x = 1$$

- Ukažte, že existuje jediná $f(x) = y$ v okolí bodu $A = [1,0]$
- Určete derivaci $f(x)$ v bodě A.
- Nalezněte tečnu k $f(x)$ v bodě A.
- Určete druhou derivaci $f(x)$ v bodě A
- Získejte T_2 k $f(x)$ v bodě A.

$$F(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy - 9\ln x = 1$$

- Ukažte, že existuje jediná $f(x) = y$ v okolí bodu $A = [1,0]$
  1. $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y - \frac{9}{x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = y + x$ spoj. v okolí b. A ✓
  2. $F(1,0) = 1^2 + \frac{1}{2}0^2 + 1 \cdot 0 - 9\ln 1 = 1$ ✓
  3. $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 0 + 1 = 1 \neq 0$ ✓
- $\Rightarrow$ Ano, ex. jednozn.

f'(x)

$$F(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy - 9\ln x = 1$$

- Určete derivaci $f(x)$ v bodě A.
  - z předchozích výsledků: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y - \frac{9}{x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = y + x$
  - $f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x+y-\frac{9}{x}}{y+x}$
  - Dosadit b. A, tj. $x = 1$, $y = f(1) = 0$: $f'(1) = -\frac{2\cdot 1+f(1)-\frac{9}{1}}{f(1)+1} = -\frac{2+0-9}{0+1} = -\frac{-7}{1} = \underline{\underline{7}}$

Tečna k f(x)

$$x_0 = 1, y_0 = f(x_0) = 0, f'(x_0) = 7$$

$$t : y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - 0 = 7(x - 1)$$

$$\underline{\underline{t : y = 7(x - 1)}}$$

f''(x)

$$x_0 = 1, y_0 = f(x_0) = 0, f'(x_0) = 7$$

$$y' = f'(x) = -\frac{2x + y - \frac{9}{x}}{y + x}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = -\frac{(2 + y' + \frac{9}{x^2})(y + x) - (2x + y - \frac{9}{x})(y' + 1)}{(y + x)^2}$$

$$f''(1) = -\frac{(2 + 7 + \frac{9}{1})(0 + 1) - (2 \cdot 1 + 0 - \frac{9}{1})(7 + 1)}{(0 + 1)^2} =$$

$$\frac{18 - (-56)}{1} = \underline{\underline{-74}}$$

Taylor T_2 k f(x) v b. A

$$T(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$x_0 = 1, y_0 = f(x_0) = 0, f'(x_0) = 7, f''(x_0) = -74$$

$$\underline{\underline{y \approx T_2(x) = 0 + 7(x - 1) - 37(x - 1)^2}}$$