Matematika 2
Dvojný integrál

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

26. března 2020

3. zkouškový příklad ze dne 17/06/13 a 19/05/27

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

a) Načrtněte množinu D. Vyjádřete tuto množinu v polárních souřadnicích.

b) Vypočítejte integrál

$$\iint_D (6 - 4x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

a) Načrtněte množinu D. Vyjádřete tuto množinu v polárních souřadnicích.

- Množina D je pravá půlelipsa se středem v počátku, poloosa ve směru y má velikost 2, ve směru x pak 1 (lépe vidět po úpravě $4x^2 + y^2 \leq 4$ vydělením 2^2).
- Zobecněné polární souřadnice:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = 2r\sin\varphi$$

$$r \in \langle 0, 1), \ \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

b) Vypočítejte integrál

$$\iint_D (6 - 4x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{1}{\sqrt{6 - 4x^2 - y^2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- Jakobián transformace je $2r$
- Převedeme x a y: $x = r\cos\varphi$, $y = 2r\sin\varphi$
- Pak $4x^2 + y^2 = 4(r\cos\varphi)^2 + (2r\sin\varphi)^2 = 4r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi = 4r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4r^2 \cdot 1 = 4r^2$

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{6 - (4x^2 + y^2)}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{2r}{\sqrt{6 - 4r^2}} \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

- Pořadí integrování je nejen zaměnitelné, ale oba integrály jsou vzájemně nezávislé (integrační proměnná φ je úplně izolovaná od r)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{1} \frac{2r}{\sqrt{6-4r^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{1} \frac{2r}{\sqrt{6-4r^2}}\,\mathrm{d}r$$

- Substitucí $6-4r^2 = t$, $-8r\,\mathrm{d}r = \mathrm{d}t$ a jelikož $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{1} \frac{2r}{\sqrt{6-4r^2}}\,\mathrm{d}r = \pi \int_{6}^{2} \frac{\frac{2r}{-8r}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{4}\int_{6}^{2} t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}r$$

- Zaměníme horní a dolní mez (a zbavíme se znaménka) a dostáváme:

$$\frac{\pi}{4}\int_{2}^{6} t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\left[2\sqrt{t}\right]_{2}^{6} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left(\sqrt{3}-1\right)$$

3. zkouškový příklad ze dne 19/06/10

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, y \geq 0\}$$

a) Načrtněte množinu D. Vypočítejte hmotnost rovinné desky ve tvaru množiny D, je-li její hustota dána funkcí $\rho(x, y) = e^{4x^2+9y^2}$.

b) Statický moment m_y desky z bodu a) vzhledem k ose y je nulový. Zdůvodněte proč a uveďte příslušný výpočtový vztah, ze kterého to vyplývá.

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, y \geq 0\}$$

a) Načrtněte množinu D. Vypočítejte hmotnost rovinné desky ve tvaru množiny D, je-li její hustota dána funkcí $\rho(x, y) = e^{4x^2+9y^2}$.

- Množina D je horní půlelipsa se středem v počátku, poloosa ve směru y má velikost 2, ve směru x pak 3.
- Zobecněné polární souřadnice:

$$x = 3r\cos\varphi \qquad r \in \langle 0, 1)$$

$$y = 2r\sin\varphi \qquad \varphi \in \langle 0, \pi\rangle$$

- Hmotnost pak je (dosazujeme jakobián $J = 6r$):

$$\iint_D \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D e^{4x^2+9y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \left(\int_0^1 6re^{36r^2}\,\mathrm{d}r\right)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$m = \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 6re^{36r^2}\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 6re^{36r^2}\,\mathrm{d}r = *$$

Substituce:

$$36r^2 = t, \quad 72r\,\mathrm{d}r = \mathrm{d}t, \quad r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{72}\,\mathrm{d}t, \quad t_1 = 36{\cdot}0^2,\ t_2 = 36{\cdot}1^2$$

$$* = 6\pi \int_0^1 re^{36r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{6\pi}{72}\int_0^{36} e^t\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{12}\left[e^t\right]_0^{36} = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}\left(e^{36}-1\right)}}$$

$$D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, y \geq 0\}$$

b) Statický moment m_y desky z bodu a) vzhledem k ose y je nulový. Zdůvodněte proč a uveďte příslušný výpočtový vztah, ze kterého to vyplývá.

Statický moment $m_y = 0$, jelikož D je symetrická podle osy y, tj. rozdělením D na levou a pravou polovinu (rozdělujeme samozřejmě podle osy y) dostáváme $m_y(D_L) = -m_y(D_R)$, tedy $m_y(D) = m_y(D_L) + m_y(D_R) = m_y(D_L) - m_y(D_L) = 0$.

Příslušný výpočtový vztah:

$$m_y = \iint_D x\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \left(\int_0^1 3r\cos\varphi \, e^{36r^2} 6r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi$$

Jelikož $\int_0^{\pi} \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 0$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^1 3r\cos\varphi e^{36r^2} 6r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = 18 \int_0^{\pi} \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^2 e^{36r^2} \,\mathrm{d}r$$

$$m_y = 18 \cdot 0 \cdot \int_0^1 r^2 e^{36r^2} \,\mathrm{d}r = \underline{\underline{0}}$$