Matematika 2
Zkouška nanečisto
Příklady z Moodle

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

20. května 2020

Příklad 1

$$f(x, y) = 8\mathrm{e}^{2y} \sin 4x$$

a) Určete gradient této funkce f v bodě $A = [\pi/24;\ 0]$.

b) Určete směr $\vec{u}_0$ (jednotkový vekt.), ve kterém má f v bodě A nejmenší derivaci.

c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[\pi/24;\ 0; ?]$. Napište diferenciál $\mathrm{d}f(A)$ dané funkce v bodě A.

d) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A ve směru $\vec{s} = (-1; 2\sqrt{3})$.

1. a)

a) Určete gradient funkce

$$f(x, y) = 8\mathrm{e}^{2y} \sin 4x$$

v bodě $A = [\pi/24;\ 0]$.

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (f_x, f_y),\ f_x = \frac{\partial f}{\partial x},\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\operatorname{grad} f(x, y) = (32\mathrm{e}^{2y} \cos 4x, 16\mathrm{e}^{2y} \sin 4x)$$
$$\operatorname{grad} f(\tfrac{\pi}{24}, 0) = \left(32\mathrm{e}^{0} \cos \tfrac{\pi}{6}, 16\mathrm{e}^{0} \sin \tfrac{\pi}{6}\right)$$
$$\operatorname{grad} f(\tfrac{\pi}{24}, 0) = \underline{\underline{\left(16\sqrt{3}, 8\right)}} \approx (27.7128, 8)$$

1. b)

b) Určete směr $\vec{u}_0$ (jednotkový vekt.), ve kterém má f v bodě A nejmenší derivaci.

$$\vec{u} = -\mathrm{grad}\, f(x,y) = \left(-16\sqrt{3}, -8\right)$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{64 + 3 \cdot 256} = \sqrt{832} = 8\sqrt{13} \approx 28.8444$$

$$\vec{u}_0 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left(-16\sqrt{3}, -8\right)}{8\sqrt{13}} = \underline{\underline{-\frac{\left(2\sqrt{3}, 1\right)}{\sqrt{13}}}} \approx$$

$$\left(-0.9608, -0.2774\right)$$

1. c)

c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[\pi/24; 0; ?]$. Napište diferenciál $\mathrm{d}f(A)$ dané funkce v bodě A.

Tečná rovina:

$$z - z_0 = f_x(A)(x - x_0) + f_y(A)(y - y_0)$$

$$z_0 = f(A) = 8\mathrm{e}^0 \tfrac{1}{2} = 4,\ f_x(A) = 16\sqrt{3},\ f_y(A) = 8$$

$$\underline{\underline{z - 4 = 16\sqrt{3}(x - x_0) + 8(y - y_0)}}$$

$$\mathrm{d}f = 16\sqrt{3}(x - x_0) + 8(y - y_0)$$

1. d)

d) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A ve směru $\vec{s} = (-1; 2\sqrt{3})$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \mathrm{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} =$$
$$\left(16\sqrt{3}, 8\right) \cdot \left(-1, 2\sqrt{3}\right) \frac{1}{\sqrt{1+12}} = \frac{0}{\sqrt{13}} = \underline{\underline{0}}$$

Příklad 2

a) Napište obecně postačující podmínky pro to, aby funkce $f(x, y)$ měla lokální minimum v bodě $[x_0, y_0]$.

b) Vyšetřete lokální extrémy funkce f:

$$f(x, y) = 3\,\ln(x^2\,y) - y^3 - 3x^2 - 5$$

(tj. určete jejich polohu, typ a hodnotu). Kde je $\operatorname{grad} f = \vec{0}$?

2. a)

a) Napište obecně postačující podmínky pro to, aby funkce $f(x, y)$ měla lokální minimum v bodě $A = [x_0, y_0]$.

$$\operatorname{grad} f(A) = \vec{0} \wedge \Delta_1(A) > 0 \wedge \Delta_2(A) > 0$$

$\Rightarrow$ f má v bodě A lokální minimum

* analogie s funkcemi jedné proměnné – stac. bod ($f'(x_0) = 0$) a konvexnost ($f''(x_0) > 0$)

** implikace neplatí obráceně – např. minimum funkce vyjadřující kuželovou plochu $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je v bodě $[0, 0]$, kde derivace neexistuje

2. b) (1/2)

b) Vyšetřete lokální extrémy funkce f:

$$f(x, y) = 3\ \ln(x^2\, y) - y^3 - 3x^2 - 5$$

(tj. určete jejich polohu, typ a hodnotu). Kde je $\operatorname{grad} f = \vec{0}$?

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(\frac{6}{x} - 6x, \frac{3}{y} - 3y^2\right) \stackrel{?}{=} \vec{0}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 1x \wedge \frac{1}{y} = y^2 \Rightarrow x^2 = 1 \wedge y^3 = 1$$
$$x = \pm 1, y = 1 \Rightarrow \underline{\underline{A = [1, 1]}}, \underline{\underline{B = [-1, 1]}}$$

2. b) (2/2)

$f_x = \frac{6}{x} - 6x,\ f_y = \frac{3}{y} - 3y^2$

$f_{xx} = -\frac{6}{x^2} - 6,\ f_{yy} = -\frac{3}{y^2} - 6y$

$f_{xy} = f_{yx} = 0$

$\Delta_1 = -\frac{6}{x^2} - 6,\ \Delta_2 = \left(-\frac{6}{x^2} - 6\right) \cdot \left(-\frac{3}{y^2} - 6y\right)$

A = [1,1]: $\Delta_1(A) = -12 < 0,\ \Delta_2(A) = 108 > 0$

B = [-1,1]: $\Delta_1(B) = -12 < 0,\ \Delta_2(B) = 108 > 0$

V obou bodech lok. max. $f(A) = f(B) = \underline{\underline{-9}}$

Příklad 3

a) Načrtněte množinu
$$D = \left\{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1, y \geq 0\right\}.$$
Vypočítejte hmotnost rovinné desky ve tvary množiny D, je-li její hustota dána funkcí $\rho(x, y) = \mathrm{e}^{-16x^2-9y^2}$.

b) Doplňte následující tvrzení tak, aby bylo pravdivé: Jedním z možných fyzikálních významů integrálu $\iint_D \rho x^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ je ...

3. a) (1/2)

a) Načrtněte množinu
$$D = \left\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2;\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1, y \geq 0 \right\}.$$
Vypočítejte hmotnost rovinné desky ve tvaru množiny D, je-li její hustota dána funkcí $\rho(x, y) = \mathrm{e}^{-16x^2-9y^2}$.

Horní polovina elipsy s poloosami $a = 3$, $b = 4$ ($\rightarrow$ zobecněná polární transformace)

$x = 3r\cos\varphi$

$y = 4r\sin\varphi$

$J = 3 \cdot 4r = 12r$, $r \in \langle 0, 1\rangle$, $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$

3. a) (2/2)

$$m = \iint_D \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{e}^{-16x^2-9y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$m = \int_0^{\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(16\cdot 9r^2\cos^2\varphi+9\cdot 16r^2\sin^2\varphi)}12r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$m = 12\int_0^{\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^{-144r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

subst. $t = -144r^2$, $\mathrm{d}t = -288r\,\mathrm{d}r$, $t_1 = 0$, $t_2 = -144$, $t_1 > t_2$

$$m = -\frac{12\cdot 12\cdot 2}{12\cdot 2}\pi\int_1^0 \mathrm{e}^{-144r^2} r\,\mathrm{d}r = +\frac{\pi}{24}\int_{-144}^{0}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

$$m = \frac{\pi}{24}\left(\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-144}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{24}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^{144}}\right)}} \approx 0.0417$$

3. b)

b) Doplňte následující tvrzení tak, aby bylo pravdivé: Jedním z možných fyzikálních významů integrálu $\iint_D \rho x^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ je ....

...moment setrvačnosti desky ve tvaru množiny D vzhledem k ose y (J_y).

Příklad 4

a) Těleso

$$M = \{\, [x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 8,\ z \ge 0\}.$$

Transformujte integrál

$$\iiint_M \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

do sférických souřadnic. (*Při transformaci integrované funkce využijte vhodně geometrického významu sférických souřadnic*)

b) Tento integrál z bodu a) vypočítejte.

4. a)

a) Těleso

$$M = \{\, [x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 8,\ z \ge 0\}.$$

Transformujte integrál
$I = \iiint_M \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ do sférických souřadnic. (*Při transformaci integrované funkce využijte vhodně geometrického významu sférických souřadnic*)

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta$$
$$y = r\sin\varphi\cos\vartheta$$
$$z = r\sin\vartheta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{8}} \frac{r^2\cos\vartheta}{\sqrt{r^6}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$$

4. b)

b) Tento integrál z bodu a) vypočítejte.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{8}} \frac{\cos\vartheta}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi\,[\ln r]_1^{\sqrt{8}}\,[\sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = 2\pi \ln\sqrt{8} = \underline{\underline{2\pi \ln 2\sqrt{2}}} \approx 6.5328$$

Příklad 5

a) Vypočítejte křivkový integrál skalární funkce

$$f(x,y) = \frac{2x+9y}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

podél křivky
$C = \Big\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : y = \cos x, x \in \langle 0;\pi\rangle\Big\}$.

b) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla

$$\vec{f} = (\mathrm{e}^{y-x},\, \mathrm{e}^{2x})$$

podél úsečky AB, a to od bodu $A = [0;0]$ do bodu $B = [2;2]$.

5. a)

a) Vypočítejte křivkový integrál skalární funkce $f(x,y) = \frac{2x+9y}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ podél křivky $C = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : y = \cos x, x \in \langle 0; \pi\rangle\right\}$.

$$I = \int_C f \, \mathrm{d}l = \int_B f\left(P(t)\right) \left\|\dot{P}\right\| \, \mathrm{d}t$$

$P = [t, \cos t]$, $\dot{P} = (1, -\sin t)$, $t \in \langle 0; \pi\rangle$,
$\left\|\dot{P}\right\| = \sqrt{1+\sin^2 t}$

$$I = \int_0^\pi \frac{2t + 9\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}} \sqrt{1+\sin^2 t} \, \mathrm{d}t$$

$$I = 2\int_0^\pi t \, \mathrm{d}t + 9\int_0^\pi \cos t \, \mathrm{d}t = 2\frac{\pi^2}{2} + 0 = \underline{\underline{\pi^2}} \approx 9.8696$$

5. b)

b) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (\mathrm{e}^{y-x}, \mathrm{e}^{2x})$ podél úsečky AB, a to od bodu $A = [0; 0]$ do bodu $B = [2; 2]$.

$$P = [2t, 2t],\ \dot{P} = (2, 2),\ t \in M = \langle 0, 1\rangle$$

$$W = \int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_M \vec{f}(P(t)) \cdot \dot{P}\,\mathrm{d}t$$

$$W = \int_0^1 (1, \mathrm{e}^{4t}) \cdot (2, 2)\,\mathrm{d}t = 2\,[t]_0^1 + \frac{2}{4}\left[\mathrm{e}^{4t}\right]_0^1$$

$$W = \underline{\underline{2 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^4 - 1\right)}} \approx 28.7991$$

Příklad 6

a) Napište Gaussovu-Ostrogradského větu (předpoklady i tvrzení). Ověřte, že ji lze použít pro výpočet toku vektorového pole $\vec{f} = (x\,y^2, y\,x^2, \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-y})$ dovnitř orientovanou plochou Q, která je povrchem tělesa $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 9\right\}$.

b) Určete divergenci zadaného pole $\vec{f}$ v bodě $G = \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}, -63\right]$. Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f}$ touto plochou.

6. a)

a) Napište Gaussovu-Ostrogradského větu (předpoklady i tvrzení). Ověřte, že ji lze použít pro výpočet toku vektorového pole $\vec{f} = (x\,y^2, y\,x^2, \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-y})$ dovnitř orientovanou plochou Q, která je povrchem tělesa $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 9\right\}$.

Je zapotřebí ověřit:

(i) spojitost všech parciálních derivací $\vec{f}$ v $G \subset \mathbb{E}_3$)

(ii) uzavřenost jednoduché, po částech hladké plochy $Q \subset G$ s normálou orientovanou *dovnitř* (odpovídá změně znaménka)

(iii) $\operatorname{int} Q \subset G$

6. b) (1/2)

b) Určete divergenci zadaného pole $\vec{f}$ v bodě $G = \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}, -63\right]$. Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (x\,y^2, y\,x^2, \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-y})$ touto plochou.

$$\mathrm{div} f = y^2 + x^2 + 0 = \underline{\underline{x^2 + y^2}},$$
$$\mathrm{div} f(G) = 2 + 3 = \underline{\underline{5}}$$
$$I = \oiint_Q \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{p} = -\iiint_M \mathrm{div}\vec{f}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Cylindrická transformace:

$$I = -\iiint_M \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\int_0^9 \int_0^{2\pi} \int_0^z r^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

6. b) (2/2)

$$I = -\int_0^9 \int_0^{2\pi} \int_0^z r^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z = -2\pi \int_0^9 \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^z \mathrm{d}z$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\frac{9^5}{5} = \underline{\underline{-\frac{9^5}{10}}}\pi \approx -18550.7905$$