Matematika 2
Parciální derivace, gradienty

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

8. března 2021

Parciální derivace

- Z definice máme

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$$

- Parciální derivace tedy provádíme jako derivace funkce jedné proměnné (přes kterou derivujeme), ostatní považujeme za konstanty (jako π atd.)
- Např. pro $f(x,y) = 3x^3y^4 - 6x + 5xy^2$ dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^4 - 6 + 5y^2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 12x^3y^3 - 0 + 10xy$$

Parciální derivace vyšších řádů

- Provedeme několik (prvních) parciálních derivací za sebou:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- Proměnná, podle které derivujeme, se samozřejmě může v jednotlivých derivacích lišit – např.:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

- Na pořadí derivací obecně **záleží**!

Parciální derivace – zápis

- Parciální derivace lze zapisovat i zkráceně jako:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

- U vyšších řádů:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial {\color{red}y} \partial {\color{red}x}} = (f_x)_y = f_{\color{blue}xy}$$

Gradienty

- $\text{grad} f(x, y) = \nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$
- Zkráceně: $\text{grad} f = \nabla f = (f_x, f_y)$
- Udává směr nejvyššího růstu (ale neříká nic o tom, jak rychle daná funkce poroste)
- Pro funkci dvou proměnných např. neříká nic dalšího o hodnotách v ose z.

Derivace ve směru

- Derivace funcke f v bodě A ve směru $\vec{s}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} \mathrm{grad} f(A)$$

Tečné roviny a totální diferenciály

- Pro $f(x)$ už známe rovnici tečny (přímky) v bodě x_0:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Pro $f(x, y)$ máme **tečnou rovinu** v bodě $[x_0, y_0]$:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

- A podobně si nyní zapišme **totální diferenciál** v bodě A:

$$\mathrm{d}z(A) = f_x(A)\mathrm{d}x(A) + f_y(A)\mathrm{d}y(A)$$

- Tečnou rovinu (resp. diferenciál) můžeme opět použít k odhadu hodnot funkce f.