Matematika 1
Výběr ze zkouškových testů

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

23. ledna 2021

Písemka B

9. září 2019, var. 1

Matematika I B – 9. 9. 2019

1. a) Ověřte, zda vektory $\vec{u} = (2, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, 1, 0)$ a $\vec{w} = (1, 1, -1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $V(E_3)$.
   b) Je-li možné vyjádřit vektor $\vec{a} = (1, 0, 0)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, najděte koeficienty a kombinaci napište.

2. a) Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2 - 2(n+1)^2}{3n-1}$.
   b) Užitím l'Hospitalova pravidla vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x) - 1}{1 - \mathrm{e}^{3x}}$.

3. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{3x-2} - 2x$.
   a) Vypočítejte derivaci $f'(x)$ a určete definiční obory $D(f)$, $D(f')$.
   b) Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 2$. Tečnu načrtněte.
   c) Pomocí této tečny vypočítejte přibližnou hodnotu $f(1,8)$.

4. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$.
   a) Napište definiční obor $D(f)$ a vypočítejte derivaci $f'(x)$.
   b) Určete intervaly monotonie a lokální extrémy dané funkce.
   c) Vypočítejte limity funkce f pro $x \to -\infty$ a pro $x \to +\infty$. Načrtněte graf funkce f.

5. Vypočítejte integrály a) $\int (2x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, b) $\int \cos^4 x \sin x\,\mathrm{d}x$. Určete též intervaly existence těchto integrálů.

6. a) Vypočítejte integrál $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.
   b) Načrtněte obrazec, který je omezen osou x a grafy funkcí $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$. Vypočítejte obsah tohoto obrazce.
   c) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x.

Příklad 1 (část 1/2)

- Tvoří $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bázi $V(\mathbb{E}_3)$?
- Je možné vyjádřit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jako LK vekt. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$?

Příklad 1 (část 2/2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}$$

Pro lineárně nezávislé vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ existuje jednoznačná lineární kombinace

$$\vec{a} = \vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$$

Příklad 2

a)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-2(n+1)^2}{3n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-2(n^2+2n+1)^2}{3n-1} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-4n-2}{3n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-4-\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{-4-0}{3-0} = \frac{-4}{3}$$

b)

$$\lim_{n\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{1-\mathrm{e}^{3x}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{l'H}}{=}} \lim_{n\to 0} \frac{-2\sin(2x)}{-3\mathrm{e}^{3x}} = \frac{0}{-3} = 0$$

Příklad 3

$$f = \sqrt{3x-2} - 2x$$

a) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - 2$, $D(f) = \langle \frac{2}{3}, +\infty)$, $D(f') = (\frac{2}{3}, +\infty)$

b) t: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,
$f(x_0) = f(2) = \sqrt{3 \cdot 2 - 2} - 2 \cdot 2 = -2$,
$f'(2) = \frac{3}{2\sqrt{4}} - 2 = -\frac{5}{4}$

- t: $y = -2 - \frac{5}{4}(x-2)$
- n: $y = -2 + \frac{4}{5}(x-2)$

c) $f(1,8) \approx -2 - \frac{5}{4}(1,8-2) = -\frac{8}{4} - \frac{5}{4}(\frac{9}{5} - \frac{10}{5}) = -\frac{7}{4}$

Příklad 4

$$f = \frac{x}{x^2 + 4}$$

a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x^2+4-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$

b)
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$ (tj. f roste na $\langle -2, 2\rangle$)
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (tj. f klesá na $(-\infty, -2\rangle$ a $\langle 2, +\infty)$)
- Lok. minimum $f(-2) = -\frac{1}{4}$, lok. maximum $f(2) = \frac{1}{4}$

c) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x}\frac{1}{x+\frac{4}{x}} = \frac{1}{1}\frac{1}{\pm\infty+0} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$

Příklad 5

a) dle $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$:

$$\int (2x-1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x \underset{u'=2,\, v=\mathrm{e}^x}{\overset{u=2x-1,\, v'=\mathrm{e}^x}{=\!=\!=}} (2x-1)\mathrm{e}^x - \int 2\cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x =$$

$$= \underline{\underline{(2x-1)\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + C}},\ C\in\mathbb{R},\ x\in(-\infty,+\infty)$$

b)

$$\int \cos^4 x \sin x \underset{dt=-\sin x}{\overset{t=\cos x}{=\!=\!=}} -\int t^4 \mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{t^5}{5} + C = \underline{\underline{-\frac{\cos^5 x}{5} + C}},\ C\in\mathbb{R},\ x\in(-\infty,+\infty)$$

Příklad 6

a)

$$\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

b)

$$P = \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{7}{6}}}$$

c)

$$V = \pi\left(\int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)^2\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \pi\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{(2-x)^3}{3}\right]_1^2\right) = \pi(\frac{1}{2} - 0 - 0 + \frac{1}{3}) = \underline{\underline{\frac{5}{6}\pi}}$$

Písemka A

17. ledna 2019, var. 1

Matematika I A – 17.1.2019

Upozornění: Výsledky bez zřetelného postupu vašeho výpočtu nebudou uznány. Použijete-li substituci, pak ji konkrétně napište. U metody per-partes napište vzorec (stačí bez předpokladů) a uveďte vaši volbu funkcí.

1. a) Napište *Frobeniovu větu* (existence řešení i počet řešení).

   b) Určete počet řešení soustavy v závislosti na hodnotě parametru α:
$$\begin{aligned} 2x - \alpha y + z &= 1 \\ x + y + (2\alpha - 1)z &= 3 \\ 2x + 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

   c) Najděte řešení zadané soustavy pro $\alpha = 1$.

2. a) Definujte pojmy *vlastní číslo* a *vlastní vektor* čtvercové matice. Uveďte (a zdůvodněte) vlastnost matice, která je postačující pro existenci nulového vlastního čísla.

   b) Najděte vlastní čísla matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}$.

   c) Pro v absolutní hodnotě nejmenší z vlastních čísel, sestavte soustavu rovnic pro vlastní vektory a ty pak určete.

3. Je dána funkce $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3x-2} - 2$.

   a) Vypočítejte 1. a 2. derivaci této funkce. Stanovte definiční obory funkcí f a f'.

   b) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $x_0 = 1$. Tečnu načrtněte.

   c) Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně dva se středem $x_0 = 1$ dané funkce f. Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 2$.

   d) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Jeho pomocí odhadněte velikost chyby aproximace hodnoty funkce f v bodě $x = 2$ při použití polynomu $T_2(x)$ z úlohy c).

4. Je dána funkce $f(x) = 4\,\mathrm{arctg}\,x - 2x$.

   a) Určete intervaly monotonie a lokální extrémy.

   b) Určete intervaly, na kterých je daná funkce konvexní, resp. konkávní. Najděte inflexní body.

   c) Určete asymptotu dané funkce f pro $x \to +\infty$. Načrtněte graf funkce f na intervalu $\langle -1; +\infty)$.

5. Vypočítejte integrály a) $\displaystyle\int (x^2 - x)\,\ln x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{\cos^3\varphi}{1 + \sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$.
   Určete též intervaly existence integrálů.

6. a) Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - x - 6}\,\mathrm{d}x$, uveďte též intervaly jeho existence.

   b) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = \dfrac{1}{x^2 - x - 6}$. Výsledek upravte.

   c) Výpočtem rozhodněte, zda konverguje nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x^2 - x - 6}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 2 (část 1/2)

a) definice…, vlastnost: M je singulární, tj. $\det M = 0$, plyne z $\det(M - \lambda E) = 0$, protože $\det(M - 0E) = \det M = 0$

b)

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} =&(1-\lambda)^2(-7-\lambda) + 4 - 4 + 4(1-\lambda) - (-7-\lambda) \\ =&(-7-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (-7-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = \underline{\underline{-7}}$, $\lambda_2 = \underline{\underline{0}}$, $\lambda_3 = \underline{\underline{2}}$

Příklad 2 (část 2/2)

c) $\lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 + 2u_3 &= 0 \\ -4u_2 - 3u_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$u_3 = p,\ p \in \mathbb{C}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} p,\ p \in \mathbb{C}$$

Příklad 3

(3.) $f(x) = 2x^3 - x^2 + (3x-2)^{\frac{1}{2}} - 2$ $\quad 3x-2 \geq 0,\ 3x \geq 2,\ x \geq \frac{2}{3}$, $D(f) = \langle \frac{2}{3}, +\infty)$

a) [17b] $f'(x) = 6x^2 - 2x + \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3x-2}}$ $\quad D(f') = (\frac{2}{3}, +\infty)$

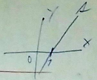
3b. $f''(x) = 12x - 2 - \frac{3}{4}\frac{3}{(3x-2)^{\frac{3}{2}}} = 12x - 2 - \frac{9}{4}(3x-2)^{-\frac{3}{2}}$

b) $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ $\quad x_0 = 1$

4b. $y_0 = f(x_0) = 2 - 1 + 1 - 2 = 0 = f(1)$

$f'(1) = 6 - 2 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$

$t: \boxed{y = \frac{11}{2}(x-1)}$



c) $\boxed{T_2(x) = 0 + \frac{11}{2}(x-1) + \frac{31}{8}(x-1)^2}$ $\quad x = 2:$

5b $f''(1) = 12 - 2 - \frac{9}{4} = \frac{31}{4}$ $\qquad \boxed{T_2(2) = \frac{11}{2} + \frac{31}{8} = \frac{75}{8}}$

d) $f'''(x) = 12 - 0 + \frac{27}{8}\frac{3}{(3x-2)^{\frac{5}{2}}}$ $\qquad R_3(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$

5b. $\sup_{\xi \in (1,2)} \left|12 + \frac{27}{8}\frac{1}{(3\xi-2)^{\frac{5}{2}}}\right| = 12 + 3\frac{27}{8} = \frac{96 + \overset{81}{27\cdot 3}}{8} = \frac{177}{8}$ $\qquad \xi \in (x, x_0)$, $x \to 2$, $x_0 \to 1$

$\boxed{|R_3(2)| \leq \frac{177}{8 \cdot 3!} = \frac{177}{48}}$ $\qquad \xi \in (1,2)$

$f(x) = T_2(x) + R_2(x)$

Příklad 4

④ $f(x) = 4\,\mathrm{arctg}\,x - 2x$

5b.)

a) $f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 2 \overset{?}{=} 0$

f'	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
		$-$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$-$	
		$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$	$\bullet$	$\searrow$	

6b.

$$\frac{4}{1+x^2} = 2$$

$$4 = 2(1+x^2) \Leftrightarrow x = \pm 1$$

klesá pro $x \in (-\infty, -1\rangle$ a $x \in \langle 1, +\infty)$
roste pro $x \in \langle -1, 1\rangle$

lok. min $f(-1) = -4\frac{\pi}{4} + 2 = \boxed{2-\pi}$

lok. max $f(1) = 4\frac{\pi}{4} - 2 = \boxed{\pi - 2}$

b) $f''(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2} \overset{?}{=} 0$

5b.

f je konvex pro $x \in (-\infty, 0\rangle$ $\cup$

f je konkáv. pro $x \in \langle 0, +\infty)$ $\cap$

f má infl. bod v $x = 0$, a to $f(0) = 0$

c) as. pro $x \to +\infty$

5b. $\lim_{x \to +\infty} \frac{4\,\mathrm{arctg}\,x}{x} - \frac{2x}{x} = 0 - 2 = -2 = k$

$\lim_{x \to +\infty} 4\,\mathrm{arctg}\,x - 2x - (-2x) = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi = q$

as. v $+\infty$: $\boxed{y = -2x + 2\pi}$

Příklad 5

5\. a) $\int (x^2 - x)\ln x\,dx = \left[\begin{matrix} u' = (x^2-x) & v = \ln x \\ u = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} & v' = \frac{1}{x}\end{matrix}\right] = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx + \int \frac{x}{2}\,dx$

$\int u'v = uv - \int uv'$

b)

9b. $= \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + C,\ C\in\mathbb{R}$ $\boxed{x>0}$

b) $\int \frac{\cos^3\varphi}{1+\sin^2\varphi}\,d\varphi = \left[\begin{matrix}\sin\varphi = s\\ \cos\varphi\, d\varphi = ds\end{matrix}\right] = \int \frac{1-s^2}{1+s^2}\,ds =$

$\cos^3\varphi = \cos^2\varphi\cdot\cos\varphi = (1-\overset{s^2}{\sin^2\varphi})\cos\varphi$

$= -\int \frac{s^2+1-2}{1+s^2}\,ds = -s + 2\int\frac{1}{1+s^2}\,ds =$

$= -\sin\varphi + 2\,\mathrm{arctg}(\sin\varphi) + C,\ C\in\mathbb{R}$

Příklad 6

6. a) $\int \frac{dx}{x^2-x-6} = \int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} = \int \left[\frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{x+2}\right] dx = (*)$

7b) 6b.

$D = 1 + 24$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

$A(x+2) + B(x-3) = 1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$

$(*) = \frac{1}{5}\left[\int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x+2}\right] = \boxed{\frac{1}{5}\ln|x-3| - \frac{1}{5}\ln|x+2| + C}, C \in \mathbb{R}$

$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

b) 5b.

$S = \left|\int_0^2 \frac{1}{x^2-x-6}\, dx\right| = \left|\frac{1}{5}\Big[\ln|x-3| - \ln|x+2|\Big]_0^2\right| = \left|\frac{1}{5}[0 - \ln 4 - \ln 3 + \ln 2]\right| =$

$= \left|\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{4\cdot 3}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{5}}\right| = \boxed{\ln 6^{\frac{1}{5}}}$

c) 6b.

$\int_0^3 \frac{dx}{x^2-x-6} = \lim_{x \to 3^-}\left[\frac{\ln|x-3|}{5}\right] - \frac{\ln|3+2|}{5} - \frac{\ln 3}{5} + \frac{\ln 2}{5} =$

$= \frac{\ln 0^+}{5} + \frac{1}{5}\left(\ln \frac{\cancel{1}\cdot 2}{15\cdot 3}\right) = \underline{\underline{-\infty}} \Rightarrow \int \text{div.}$

$\ln 0^+ \to -\infty$

Písemka A

31. ledna 2019, var. 1

Matematika I A – 31. 1. 2019

1. a) Vypočítejte determinant matice soustavy s parametrem $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} px \;+\; 2y + 2z &= p+1 \\ y \;+\; z &= p \\ -2x + (p+2)y + 2z &= p. \end{aligned}$$

b) Určete hodnoty parametru p, pro které lze při řešení zadané soustavy použít Cramerovo pravidlo. Jeho užitím vypočítejte neznámou y v závislosti na parametru p.

c) Jak se změní hodnota determinantu matice, pokud v ní I) prohodím 2. a 3. řádek, II) prohodím 1. a 3. sloupec.

d) **Dokažte**, že $det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/det(\mathbf{A})$.

2. a) Definujte pojem *regulární* matice. Kolik řešení může mít soustava homogenních / nehomogenních lineárních rovnic s regulární maticí?

b) Zdůvodněte, zda existuje inverzní matice k matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 6, & 5, & 4 \\ 13, & 10, & 8 \end{pmatrix}$. V kladném případě inverzní matici vypočítejte.

c) Vypočítejte matici $\boldsymbol{X}$, která je řešením rovnice $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 2 \\ 0, & 3, & -1 \end{pmatrix}$.

3. Je dána funkce $f(x) = (x-11)\sqrt{x}$.

a) Určete definiční obor $D(f)$ a průsečíky grafu funkce f s osami x a y.

b) Najděte bod, ve kterém má tečna sklon 45°. Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu této funkce v tomto bodě.

c) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů dané funkce $g(x) = \sqrt{|x|}$ na intervalu $\langle -2, 4\rangle$. Absolutní extrémy určete (tj. určete jejich polohu a hodnotu).

4. Je dána funkce $f(x) = x^2 - 8\ln x$.

a) Napište definiční obor $D(f)$. Najděte body, ve kterých je derivace rovna nule.

b) Určete intervaly monotónie a lokální extrémy této funkce.

c) Určete intervaly, na nichž je daná funkce konvexní, resp. konkávní.

d) Vypočítejte limitu funkce f pro $x \to 0+$. Načrtněte graf funkce f v intervalu $(0, \mathrm{e}\rangle$.

5. Vypočítejte integrály a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln(3x)}}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (x-x^2)\,\mathrm{e}^x + 2x\,\mathrm{d}x$.

Uveďte též intervaly existence integrálů.

6. a) Vypočítejte obsah obrazce mezi osou x a grafem funkce $y = \cos^4 x\, \sin^3 x$, $x \in \langle 0, \pi\rangle$.

b) Dána funkce $g(x) = \frac{1}{1+cx^2}$. Určete konstantu c tak, aby obrazec omezený touto funkcí a osou x na intervalu $x \in \langle 0, +\infty)$ měl plochu $S = 1/2$.

Příklad 1

a)

$$\begin{vmatrix} p & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & p+2 & 2 \end{vmatrix} = 2p - 4 + 4 - p(p+2) = -p^2$$

b) $p \neq 0$

$$\begin{vmatrix} p & p+1 & 2 \\ 0 & p & 1 \\ -2 & p & 2 \end{vmatrix} = 2p^2 - 2(p+1) + 4p - p^2 = p^2 + 2p - 2$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{p^2+2p-2}{p^2}}}$$

c) Každé prohození dvojic řádků/sloupců obrací znaménko determinantu.

d) $A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1 \Rightarrow$
$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\det A^{-1} = 1/\det A}}$

Příklad 2 (část 1/2)

a) ...

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 40+4\cdot 13+60-5\cdot 13-40-48 = 12-13 = -1$$

$\det A = -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existuje

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 2 (část 2/2)

c)

$$X \cdot A = B$$
$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$
$$X = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 1 \\ -17 & 18 & -7 \end{pmatrix}$$

Příklad 3

$5 \quad -3 \quad 1)$

3. a) $f(x) = (x-11)\sqrt{x}$

$D(f) = \mathbb{R}_0^+ = \langle 0, +\infty)$

průs. s os. $[0,0], [11,0]$

$x = 0:$ $\quad Y = -11 \cdot 0 = 0$

$Y = 0:$ $\quad 0 = (x-11)\sqrt{x}$

$x = 11 \vee x = 0$

b) $\alpha = 45^\circ$

$f'(x_0) = 1$

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-11}{2\sqrt{x}} \overset{?}{=} 1 \quad (x \overset{!}{\neq} 0)$$

$$2x + x - 11 - 2\sqrt{x} = 0$$

$$3x - 2\sqrt{x} - 11 = 0 \qquad 3z^2 - 2z - 11 = 0$$

$x = z^2$

$\sqrt{x} = z$

$$D = 4 + 132 = 136$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{136}}{6} = z_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}}$$

Příklad 5

5.) a) $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln 3x}}\,dx = \begin{bmatrix} \ln 3x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} =$

$= \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\ln 3x)^2} + C, \; C \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{1}{3}\}$

b) $\int \left((x-x^2)e^x + 2x\right)dx = \begin{bmatrix} u = x - x^2 & v' = e^x \\ u' = 1-2x & v = e^x \end{bmatrix} =$

$\int uv' = uv - \int u'v$

$= (x-x^2)e^x - \int (1-2x)e^x\,dx + x^2 = \begin{bmatrix} u = 1-2x & v' = e^x \\ u' = -2 & v = e^x \end{bmatrix} =$

$= (x-x^2)e^x - (1-2x)e^x - 2e^x + x^2 + C = xe^x - x^2e^x - e^x + 2xe^x + x^2 + C =$

$= \overbrace{3xe^x - x^2e^x - 3e^x}^{(-3+3x-x^2)e^x} + x^2 + C = 3e^x(x-1) + x^2(1-e^x) + C$

$x \in \mathbb{R}, \; C \in \mathbb{R}$

Příklad 6

⑥ a) $y = \cos^4 x \cdot \sin^3 x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle$

$$\int_0^{\pi} \cos^4 x \sin^3 x \, dx = \begin{bmatrix} \cos x = s \\ -\sin x \, dx = ds \\ s_1 = 1, \, s_2 = -1 \end{bmatrix} = \int_{-1}^{1} s^4(1-s^2)\, ds =$$

$$= \int_{-1}^{1} [s^4 - s^6]\, ds = \left[\frac{s^5}{5} - \frac{s^7}{7}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) = \underline{\frac{2}{5} - \frac{2}{7}} =$$

$$\cos^4 x \sin^3 x \overset{x \in \langle 0, \pi \rangle}{\geq} 0$$

$$\frac{14}{35} - \frac{10}{35} = \underline{\frac{4}{35} = S}$$

b) $g(x) = \dfrac{1}{1+cx^2}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+cx^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\sqrt{c}x)^2}\, dx = \begin{bmatrix} \sqrt{c}\, x = z \\ \sqrt{c}\, dx = dz \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg}(\sqrt{c}\, x)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{c}}\Big(\lim_{k \to +\infty} \underbrace{\operatorname{arctg}(\sqrt{c} \cdot k)}_{\to +\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{0}\Big) = \frac{\pi}{2\sqrt{c}} \overset{!}{=} \frac{1}{2}$$

$\sqrt{c} = \pi$

$\boxed{c = \pi^2}$

Písemka A

14. Února 2019, var. 1

Matematika I A 14. 2. 2019

Upozornění: Výsledky bez zřetelného postupu vašeho výpočtu nebudou uznány. Použijete-li substituci, pak ji konkrétně napište. U metody per-partes napište vzorec (stačí bez předpokladů) a uveďte volbu funkcí.

1. a) Definujte pojmy *lineární závislost, lineární nezávislost* skupiny vektorů $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}$.
   b) Určete, pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ tvoří vektory $\vec{u} = (6; -1; 1)$, $\vec{v} = (p; 0; 1)$ a $\vec{w} = (0; 1; p)$ bázi prostotru $V(\mathbb{E}_3)$.
   c) Zvolte $p = 1$. Pokud lze, vyjádřete vektor $\vec{a} = (-2; 5; 3)$ pomocí vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Na základě výsledku popište vzájemnou polohu těchto čtyř vektorů.
2. a) Definujte pojem *inverzní matice* k matici $\boldsymbol{A}$. Uveďte nějakou nutnou a postačující podmínku pro existenci inverzní matice.
   b) Existuje inverzní matice k matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & -2 \\ 0, & 2, & 3 \end{pmatrix}$? Odpověď zdůvodněte ! V kladném případě ji vypočítejte a ověřte správnost výsledku.
   c) Vypočítejte obecně matici $\boldsymbol{X}$, která je řešením rovnice $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{G} = \boldsymbol{H}$.
3. Je dána funkce $f(x) = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$.
   a) Vypočítejte 1. , 2. a 3. derivaci této funkce.
   b) Napište Taylorův polynom $T_3(x)$ stupně 3 o středu $x_0 = 0$ zadané funkce f.
   c) Pomocí $T_3(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 1$ a vypočítejte o kolik se liší od přesné hodnoty $f(1)$.
   d) Má funkce f v bodě $x_0 = 0$ inflexní bod? Odpověď zdůvodněte.
4. Je dána funkce $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$.
   a) Určete definiční obor $D(f)$. Najděte průsečíky grafu s osami x, y.
   b) Určete intervaly, na kterých je funkce f rostoucí, případně klesající. Určete lokální extrémy.
   c) Vypočítejte limity dané funkce pro $x \to -\infty$, pro $x \to +\infty$. Načrtněte graf zadané funkce f.
5. a) Vypočítejte integrál $\int \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \, \mathrm{d}\varphi$, uveďte interval(y) existence.
   b) Nalezněte integrál funkce f z příkladu 4. a jeho užitím vypočítejte střední hodnotu funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$.
6. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$. a) Vypočítejte $\int f(x) \, \mathrm{d}x$, uveďte interval(y) jeho existence.
   b) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 3; 4 \rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$. Výsledek upravte.
   c) Vypočítejte nevlastní integrál $\int_3^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$. Rozhodněte, zda konverguje.