

Matematika 1

Posloupnosti reálných čísel

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

2. listopadu 2020

Důležité definice (1/2)

- Pojmy z přednášky: maximum, minimum, supremum, infimum, \mathbb{R}^*
- Příklad: $M_1 = \langle 1, +\infty \rangle \Rightarrow$
 $\Rightarrow \max M_1 \text{ neex.}, \min M_1 = 1, \sup M_1 = \infty, \inf M_1 = 1$
- Jiný příklad: $M_2 = (-5, 7) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \max M_2 = 7, \min M_2 \text{ neex.}, \sup M_2 = 7, \inf M_2 = -5$

Důležité definice (2/2)

Posloupnost reálných čísel je zobrazení, které přiřadí každému $n \in \mathbb{N}$ číslo $a_n \in \mathbb{R}$.

Posloupnost může být např.:

- (ne)omezená (shora/zdola)
- (ne)rostoucí/(ne)klesající
- (ryze) monotónní

Příklady na posloupnosti

Rozhodněte o omezenosti a monotonii následujících posloupností:

■ $a_n = 2 + 3^n$

■ $b_n = \frac{n+5}{n+2}$

■ $c_n = -\frac{n^2}{n+1}$

Řešení příkladů na posloupnosti (1/3)

$$a_n = 2 + 3^n$$

- Roste?

$$(a_{n+1} \stackrel{?}{>} a_n) \Rightarrow (2 + 3^{n+1} \stackrel{?}{>} 2 + 3^n) \Rightarrow (3 \cdot 3^n \stackrel{?}{>} 3^n) \Rightarrow 3 > 1$$

- Vidíme, že posloupnost je rostoucí \Rightarrow není nerostoucí \Rightarrow není klesající \Rightarrow je neklesající.
- Rostoucí posloupnost je ryze monotonní.
- Posloupnost je omezená zdola číslem 5, shora je neomezená (tj. jde do ∞) \Rightarrow není omezená \Rightarrow je neomezená

Řešení příkladů na posloupnosti (2/3)

$$b_n = \frac{n+5}{n+2}$$

■ Roste?

$$\begin{aligned} (b_{n+1} > b_n) &\Rightarrow \left(\frac{(n+1)+5}{(n+1)+2} > \frac{n+5}{n+2} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{n+6}{n+3} > \frac{n+5}{n+2} \right) \Rightarrow \left((n+6)(n+2) > (n+5)(n+3) \right) \\ &\Rightarrow \left(n^2 + 8n + 12 > n^2 + 8n + 15 \right) \Rightarrow 0 < 3 \end{aligned}$$

- Vidíme, že posloupnost je klesající \Rightarrow není neklesající \Rightarrow není rostoucí \Rightarrow je nerostoucí.
- Klesající posloupnost je ryze monotonní.
- Posloupnost je omezená shora číslem 2 (tj. $a_1 = \frac{6}{3}$), zdola je omezená číslem 1 \Rightarrow je omezená \Rightarrow není neomezená

Řešení příkladů na posloupnosti (3/3)

$$c_n = -\frac{n^2}{n+1}$$

■ Roste?

$$\begin{aligned} (c_{n+1} > c_n) &\Rightarrow \left(-\frac{(n+1)^2}{(n+1)+1} > -\frac{n^2}{n+1} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{n^2+2n+1}{n+2} < \frac{n^2}{n+1} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(n^3+3n^2+3n+1 < n^3+2n^2 \right) \Rightarrow n^2+3n+1 > 0 \end{aligned}$$

- Vidíme, že posloupnost je klesající \Rightarrow není neklesající \Rightarrow není rostoucí \Rightarrow je nerostoucí (a je tedy klesající posloupnost \Rightarrow je ryze monotonní).
- Posloupnost je omezená shora číslem $a_1 = -\frac{1}{2}$, není omezená zdola, není omezená \Rightarrow je neomezená