Matematika 1
Vlastní čísla a vektory

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

30. října 2020

K definici

- $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$
- ... a $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ je vlastní vektor (**nenulový!**) A příslušný λ
- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Jak najdeme vl. č. a vl. v.? (1/2)

- $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
- Převedeme vše na jednu stranu: $A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$
- Přidání jednotkové matice nic nezmění: $A\vec{v} - \lambda E\vec{v} = \vec{0}$
- Vytkneme: $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$
- Vidíme, že $(A - \lambda E)$ je (čtvercová) matice homogenního systému
- Homogenní systém má vždy alespoň jedno řešení, ovšem to nechceme ($\vec{v} \neq 0$)
- Aby existovalo více řešení (tj. nekonečně mnoho, jiná možnost není), musí být $\mathrm{h}(A) < n$, což platí pro singulární matice

Jak najdeme vl. č. a vl. v.? (2/2)

- Dostáváme podmínku (tzv. *charakteristickou rovnici* nebo též *char. polynom*): $\det(A - \lambda E) = 0$
- Vyřešením této rovnice v závislosti na λ získáváme vl. č., která dosadíme do $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$ a nalezneme vl. vektory
- Vektory $\vec{v}$ jsou řešení singulárního systému, tj. budeme mít $n - \mathrm{h}(A)$ parametrů pro každou množinu řešení (tj. pro každé λ)
- počet parametrů odpovídá násobnosti vl. č.

- Pokusme se nyní najít vl. č. a vl. v. pro následující matice

Příklad A (1/2)

- Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$
- Máme tedy: $\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$
- $(1-\lambda)^2 - 4 = 0$
- $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$
- $D = 4 + 12, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

Příklad A (2/2)

- Postupným dosazováním nalezených $\lambda_{1,2}$ dostávám homogenní systémy:
- $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

- $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = p_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

- Podmínky na p_1, p_2 plynou z def. (komplexní, nenulové)

Příklad B (1/2)

- Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
- $\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$
- $\lambda^2 - 9 = 0$
- $\lambda^2 = 9$
- $\lambda_{1,2} = \pm 3$

Příklad B (2/2)

- Postupným dosazováním nalezených $\lambda_{1,2}$ dostávám homogenní systémy:
- $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0-3 & 3 \\ 3 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

- $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{pmatrix} -(-3) & 3 \\ 3 & -(-3) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = p_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Příklad C (1/2)

- Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
- $\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$
- $\lambda^2 + 9 = 0$
- $\lambda^2 = -9$
- $\lambda_{1,2} = \pm 3i$

Příklad C (2/2)

- Postupným dosazováním nalezených $\lambda_{1,2}$ dostávám homogenní systémy:
- $\lambda_1 = 3i$:

$$\begin{pmatrix} 0 - 3i & 3 \\ 3 & 0 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = p_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, p_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

- $\lambda_2 = -3i$:

$$\begin{pmatrix} -(-3i) & 3 \\ 3 & -(-3i) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = p_2 \begin{pmatrix} 1i \\ -1 \end{pmatrix}, p_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$