Matematika 1
Determinanty

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

16. října 2020

Determinant – definice

Viz přednáška:

I.2.21. Determinant. Nechť A je čtvercová matice. *Determinantem* matice A nazýváme číslo, které označujeme *det A* a které lze matici A přiřadit podle těchto pravidel:

a) Je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1, pak $det\, A = a$.

b) Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu $n \times n$ (pro $n > 1$), vybereme libovolný řádek matice A (označíme jej jako i–tý) a položíme

(I.2.1) $$det\, A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in},$$

kde A_{ij} je tzv. *doplněk prvku a_{ij}* v matici A. Tento doplněk je roven $(-1)^{i+j} \cdot A^*_{ij}$, kde A^*_{ij} je determinant čtvercové matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním i–tého řádku a j–tého sloupce.

- Rekurzivní definice (tj. determinanty $n \times n$ pomocí determinantů matic $(n-1) \times (n-1)$

Vlastnosti determinantu (1/2)

- Řádkové/sloupové úpravy pro výpočet determinantu – viz předn. (mohou být zrádné)
- Počet sčítaných členů v determinantu matice $n \times n$ je vždy $n!$ (mohou být i nulové)
- $\det A = \det A^T$ ($\Rightarrow$ stejná pravidla pro řádkové a sloupcové úpravy)
- $\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B) \Rightarrow \det(A^n) = (\det A)^n$
- Pro inverzní matice také $\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$

Vlastnosti determinantu (2/2)

- A má LZ řádky/sloupce $\Rightarrow \det A = 0$
- **Singulární** matice: $\det A = 0$
- **Regulární** matice: $\det A \neq 0$
- Pouze k regulární matici existuje matice inverzní
- Nezapomeňme, že tyto pojmy jsou pouze pro matice čtvercové

Příklady (1/5)

- $M \in \mathbb{R}^{1,1}, M = (-15) \Rightarrow \det M = -15$
- $B \in \mathbb{R}^{2,2}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 1 \cdot 8 - (-4) \cdot 2 = 8 + 8 = \underline{\underline{16}}$
- $D \in \mathbb{R}^{2,3}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 81 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det D$ neexistuje (není čtvercová)

Příklady (2/5)

- $A \in \mathbb{R}^{3,3}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$
- ... rozvojem pomocí prvního sloupce: $\det A =$

$$= (-1)^{1,1} \cdot 1 \cdot A_{1,1} + (-1)^{1,2} \cdot (-2) \cdot A_{1,2} + (-1)^{1,3} \cdot 0 \cdot A_{1,3} =$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 0 = (3 - 28) + 2(-6 - 21)$$
$$= -25 - 54 = \underline{\underline{-79}} = \det A$$

- ... nebo pomocí Sarussova pravidla:
$\det A = 3 - 42 + 0 - (0 + 28 + 12) = -39 - 40 = -79$

Příklady (3/5)

- $C \in \mathbb{R}^{3,3}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- ... rozvojem pomocí druhého řádku (tam je nejvíce nul!):

$$\begin{aligned} &\det C = \\ &= (-1)^{2,1} \cdot 0 \cdot A_{2,1} + (-1)^{2,2} \cdot 0 \cdot A_{2,2} + (-1)^{2,3} \cdot 1 \cdot A_{2,3} = \\ &= 0 + 0 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

- ... nebo pomocí Sarussova pravidla:
  $\det C = 0 + 0 + 2 - (0 + 2 + 0) = 2 - 2 = 0$
- ... nebo odhalením LZ řádků (3. řádek je součtem prvního a trojnásobku druhého)

Příklady (4/5)

- $G \in \mathbb{R}^{3,3}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
- $\det G = (-1)^{4+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & {\color{red}3} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$

  $2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & {\color{red}-4} \end{vmatrix} =$

  $-6 \cdot (-1)^{3+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 24 \cdot (4 - (-12)) = \underline{\underline{384}}$

Příklady (5/5)

- $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$, $Q = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$
- $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$
- pak $\det Q = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$