# Normy matic

**Příklad 1**

Je dána matice $A$ a vektor $y$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Spočtěte všechny jejich normy (vektor je také matice, typu $n \times 1$).
Ověřte, že platí

$$||Ay|| \le ||A|| \cdot ||y|| \tag{1}$$

**Řešení**

$Ay = (4, 14, -2)^T$

*Frobeniova norma* - také někdy nazývaná *Euklidovská*:
$||A||_2 = \sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{42} = 6.4807$
$||y||_2 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2.8284$
$||Ay||_2 = \sqrt{4^2 + 14^2 + (-2)^2} = 14.6969$
$14.6969 \le 6.4807 \cdot 2.8284 = 18.3300$

*Sloupcová norma* (po sloupcích sečteme absolutní hodnoty prvků matice a z nich vybereme maximum):
$||A||_1 = \max(\ |2| + |3| + |-3|,\ 0 + |-4| + |-2|) = \max(\ 8,\ 6) = 8$
$||y||_1 = |2| + |-2| = 4$
$||Ay||_1 = |4| + |14| + |-2| = 20$
$20 \le 8 \cdot 4 = 32$

*Řádková norma* (po řádcích sečteme absolutní hodnoty prvků matice a z nich vybereme maximum):
$||A||_\infty = \max(\ |2| + 0,\ |3| + |-4|,\ |-3| + |-2|) = \max(\ 2,\ 7,\ 5) = 7$
$||y||_\infty = \max(\ |2|,\ |-2|) = 2$
$||Ay||_\infty = \max(\ |4|,\ |14|,\ |-2|) = 14$
$14 \le 7 \cdot 2 = 14$

Pozor: ve vztahu (1) nesmíme míchat různé typy norem! Zkuste porovnat například $||Ay||_1$ a $||A||_2$, $||y||_2$ .

## Spektrální poloměr

**Příklad 2**

Určete spektrální poloměr matice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a ověřte, že platí $\rho(A) \leq ||A||$ pro libovolnou normu této matice.

**Řešení**

$\det(A - \lambda I) \;=\; (-2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm i$

$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{(-2)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{5}$

$\rho(A) = \max(\,|\lambda_1|, |\lambda_2|) = \max(\,\sqrt{5}, \sqrt{5}) = \sqrt{5} = 2.2361$

$||A||_2 = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{10} = 3.1623$
$||A||_1 = ||A||_\infty = \max(\;|-2| + |-1|,\; |1| + |-2|) = \max(\;3,\;3) = 3$

$2.2361 < 3.1623, \quad 2.2361 < 3$ .

## Symetrie, pozitivní definitnost, diagonální dominance

**Příklad 3**

Jsou dány matice

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Která z nich je symetrická?
b) Která je ostře diagonálně dominantní?
c) Která je symetrická pozitivně definitní?

**Řešení**

a) Matice $B$ a $C$ jsou symetrické, matice $A$ není.

b) Matice je *diagonálně dominantní* (zkráceně d.d.), právě když absolutní hodnota prvku na diagonále je větší nebo rovna součtu absolutních hodnot ostatních prvků - a to buď pro všechny řádky, nebo pro všechny sloupce. Matice je *ostře diagonálně dominantní* (zkráceně o.d.d.), jsou-li nerovnosti ostré.

Matice $A$:

$$\text{řádky:}\quad \begin{array}{ccccc} |-5| & > & |-1| & + & |\,0\,| \\ |\,3\,| & < & |\,3\,| & + & |\,1\,| \\ |\,2\,| & \geq & |\,1\,| & + & |-1| \end{array} \qquad \text{sloupce:}\quad \begin{array}{ccccc} |-5| & > & |\,3\,| & + & |\,1\,| \\ |\,3\,| & > & |-1| & + & |-1| \\ |\,2\,| & > & |\,1\,| & + & |\,0\,| \end{array}$$

Ve druhém řádku podmínka neplatí $\Rightarrow$ $A$ není d.d. po řádcích. Zkusíme tedy sloupce: podmínka platí pro všechny tři sloupce a navíc nerovnosti jsou ostré $\Rightarrow$ $A$ je o.d.d. po sloupcích. Takže $A$ je ostře diagonálně dominantní.

Matice $B$ je symetrická - kontrolujeme jen řádky (sloupce vyjdou stejně):

$$\begin{array}{ccccc} |\,1\,| & \geq & |-1| & + & |\,0\,| \\ |\,2\,| & \geq & |-1| & + & |-1| \\ |\,2\,| & > & |\,0\,| & + & |-1| \end{array}$$

Podmínka platí pro všechny řádky, nerovnost však není vždy ostrá $\Rightarrow B$ je diagonálně dominantní, ale ne ostře.

Matice $C$ je symetrická - kontrolujeme jen řádky:

$$\begin{array}{ccccc} |\,1\,| & \geq & |-1| & + & |\,0\,| \\ |\,1\,| & < & |-1| & + & |\,1\,| \\ |\,2\,| & > & |\,0\,| & + & |1| \end{array}$$

Matice $C$ není diagonálně dominantní, ve druhém řádku (i sloupci) je podmínka porušena.

c) Symetrická matice je *pozitivně definitní*, právě když všechny její hlavní minory jsou kladné.

Matice $A$ není symetrická.

Matice $B$:

$$\det(1) = 1 > 0 \ , \quad \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 1 > 0 \ , \quad \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 1 > 0$$

Všechny hlavní minory jsou kladné, matice $B$ je tedy pozitivně definitní.

Matice $C$:

$$\det(1) = 1 > 0 \ , \quad \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Druhý hlavní minor není kladný, dál už tedy nemusíme nic zkoumat. Matice $C$ není pozitivně definitní.

**Závěr:** Matice $A$ je ostře diagonálně dominantní, není symetrická ani pozitivně definitní. Matice $B$ je diagonálně dominantní (ne však ostře), symetrická a pozitivně definitní. Matice $C$ je symetrická, není diagonálně dominantní, ani pozitivně definitní.

# Iterační metody

## Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

### Prostá iterační metoda (dále zkratka *pim*)

Soustavu $x = Ux + v$ řešíme tak, že
1. zvolíme $x^{(0)}$,
2. pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ počítáme $x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + v$, až $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| < \epsilon$ .

Podmínky konvergence:
$\rho(U) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ *pim* konverguje
$||U|| < 1 \quad \Rightarrow \quad$ *pim* konverguje

### Řešení soustavy $\mathbf{Ax = b}$

Postup: soustavu $Ax = b$ převedeme na soustavu $x = Ux + v$, a tu řešíme *pim*. Využijeme přitom vyjádření matice $A$ jako součtu $A = L + D + U$, kde $L$ je dolní trojúhelníková část, $D$ je diagonála a $U$ je horní trojúhelníková část.

**Jacobiho metoda** (dále zkratka $J$)
Soustavu $Ax = b$ vyjádříme jako $x = U_J\,x + v_J$, kde $U_J = -D^{-1}(L + U)$ a $v_J = D^{-1}b$. Tuto soustavu řešíme *pim*.

Podmínky konvergence:
$\rho(U_J) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad J$ konverguje
$A$ je o.d.d $\quad \Rightarrow \quad J$ konverguje

Věta: vlastní čísla $\lambda_i$ matice $U_J$ lze získat řešením rovnice $\det(L+\lambda D+U) = 0$.

**Gaussova-Seidelova metoda** (dále zkratka $GS$)
Soustavu $Ax = b$ vyjádříme jako $x = U_G\,x + v_G$, kde $U_G = -(L + D)^{-1}U$ a $v_J = (L + D)^{-1}b$. Tuto soustavu řešíme *pim*.

Podmínky konvergence:
$\rho(U_G) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad GS$ konverguje
$A$ je o.d.d $\quad \Rightarrow \quad GS$ konverguje
$A$ je symetrická a pozitivně definitní $\quad \Rightarrow \quad GS$ konverguje

Věta: vlastní čísla $\lambda_i$ matice $U_G$ lze získat řešením rovnice $\det(\lambda L+\lambda D+U) = 0$.

## Prostá iterační metoda

### Příklad 4

Je dána soustava rovnic $x = Ux + v$, kde

$$U = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Zvolte $x^{(0)} = (\,0,\,0)^T$ a spočítejte první tři iterace prostou iterační metodou.
b) Dokažte, že *pim* pro tuto soustavu konverguje.

**Řešení**

a)

$$x^{(1)} = Ux^{(0)} + v = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Ux^{(1)} + v = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = Ux^{(2)} + v = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Nejdřív zkusíme, jestli platí některá z postačujících podmínek, protože se snáze spočítají:
$||U||_1 = \max(\ |1/2| + |-5/4|,\ |\ 1\ | + |-3/2|) = \max(\ 7/4,\ 10/4) = 10/4 > 1$
$||U||_\infty = \max(\ |1/2| + |\ 1\ |,\ |-5/4| + |-3/2|) = \max(\ 3/2,\ 11/4) = 11/4 > 1$
$||U||_2 = \sqrt{(1/2)^2 + 1^2 + (-5/4)^2 + (-3/2)^2} = \sqrt{81/16} = 9/4 > 1$
Žádná z norem není menší než 1, takže z nich nepoznáme nic.

Musíme tedy ověřit nutnou a postačující podmínku, tj. spočítat $\rho(U)$:
$\det(U-\lambda I) = (1/2-\lambda)(-3/2-\lambda)+5/4 = \lambda^2+\lambda+1/2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1/2 \pm 1/2i$
$||\lambda_{1,2}|| = \sqrt{(1/2)^2 + (\pm 1/2)^2} = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2 \quad \Rightarrow \quad \rho(U) = \sqrt{2}/2 < 1$
$\Rightarrow$ *pim* konverguje.

## Jacobiho metoda

**Příklad 5**

Je dána soustava rovnic $Ax = b$, kde $A$ je matice z Příkladu 3 a $b = (2, 1, -1)^T$.
a) Zvolte $x^{(0)} = (\ 0,\ 0,\ 0)^T$ a spočítejte první dvě iterace $J$ metodou.
b) Dokažte, že $J$ pro tuto soustavu konverguje.
c) Lze na základě výsledků Př. 3 rozhodnout, zda $J$ konverguje i pro matice $B$ a $C$?

**Řešení**

a) Jednotlivé iterace $J$ metody se počítají lépe po složkách než v maticovém tvaru. Postup:

1. Napíšeme si soustavu po jednotlivých rovnicích:

$$\begin{aligned} -5x_1 - x_2 \qquad &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

2. Z každé rovnice vyjádříme diagonální prvek:

$$\begin{aligned} x_1 &= -(2 + x_2)/5 \\ x_2 &= (1 - 3x_1 - x_3)/3 \\ x_3 &= (-1 - x_1 + x_2)/2 \end{aligned} \tag{2}$$

3. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ počítáme $x^{(k+1)}$ tak, že do pravé strany (2) dosadíme složky předchozí iterace $x^{(k)}$:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -(2 + x_2^{(k)})/5 \\
x_2^{(k+1)} &= (1 - 3x_1^{(k)} - x_3^{(k)})/3 \\
x_3^{(k+1)} &= (-1 - x_1^{(k)} + x_2^{(k)})/2
\end{aligned}
$$

Pro $k = 0$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -(2 + x_2^{(0)})/5 = -(2 + 0)/5 = -2/5 \\
x_2^{(1)} &= (1 - 3x_1^{(0)} - x_3^{(0)})/3 = (1 - 0 - 0)/3 = 1/3 \\
x_3^{(1)} &= (-1 - x_1^{(0)} + x_2^{(0)})/2 = (-1 - 0 + 0)/2 = -1/2
\end{aligned}
$$

První iterace je tedy $x^{(1)} = (-2/5,\ 1/3, -1/2)^T$. Druhá iterace:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -(2 + x_2^{(1)})/5 = -(2 + 1/3)/5 = -7/15 \\
x_2^{(2)} &= (1 - 3x_1^{(1)} - x_3^{(1)})/3 = (1 - 3(-2/5) - (-1/2))/3 = 9/10 \\
x_3^{(2)} &= (-1 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)})/2 = (-1 - (-2/5) + 1/3)/2 = -2/15
\end{aligned}
$$

Druhá iterace je $x^{(2)} = (-7/15,\ 9/10, -2/15)^T$.

b) V Př. 3 jsme dokázali, že $A$ je ostře diagonálně dominantní, což je postačující podmínka pro konvergenci $J$ metody.

c) Matice $B$ ani $C$ z Př. 3 nejsou o.d.d., postačujcí podmínka pro konvergenci $J$ metody tedy není splněna a o konvergenci nevíme nic. Kdybychom chtěli poznat, zda $J$ metoda konverguje, museli bychom spočítat spektrální poloměr matice $U_J$, což pro matici $3 \times 3$ obecně není snadné.

**Příklad 6**

Rozhodněte, zda pro soustavu $Ax = b$ bude konvergovat $J$ metoda, je-li dáno

$$
A = \begin{bmatrix} 6 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

**Řešení**

Matice není o.d.d., postačující podmínka pro konvergenci $J$ metody tedy neplatí a musíme spočítat spektrální poloměr matice $U_J$. Vlastní čísla matice $U_J$ určíme z rovnice $\det(L + \lambda D + U) = 0$, tj.

$$
\begin{vmatrix} 6\lambda & 11 & -1 \\ 1 & 3\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 36\lambda^3 - 3\lambda - 22\lambda = \lambda(36\lambda^2 - 25) = 0
$$

$$
\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm 5/6 \quad \Rightarrow \quad \rho(U_J) = 5/6 < 1.
$$

Spektrální poloměr matice $U_J$ je menší než 1, takže $J$ metoda konverguje.

## Gaussova-Seidelova metoda

**Příklad 7**

Je dána soustava rovnic $Ax = b$, kde $A$ je matice z Příkladu 3 a $b = (2, 1, -1)^T$.
a) Zvolte $x^{(0)} = (0,\, 0,\, 0)^T$ a spočítejte první dvě iterace $GS$ metodou.
b) Dokažte, že $GS$ pro tuto soustavu konverguje.
c) Lze na základě výsledků Př. 3 rozhodnout, zda $GS$ konverguje i pro matice $B$ a $C$?

**Řešení**

a) Jednotlivé iterace $GS$ metody se počítají lépe po složkách než v maticovém tvaru. Postup:

1. Napíšeme si soustavu po jednotlivých rovnicích - stejně jako u $J$ metody, viz Př.5.
2. Z každé rovnice vyjádříme diagonální prvek - stejně jako u $J$ metody, viz Př.5.
3. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ počítáme $x^{(k+1)}$ po jednotlivých rovnicích, počínaje první. Začneme jako u $J$ metody, ale jakmile spočítáme novou složku, hned ji dosadíme do pravé strany všech zbývajících rovnic (2):

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -(2 + x_2^{(k)})/5 \\
x_2^{(k+1)} &= (1 - 3x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)})/3 \\
x_3^{(k+1)} &= (-1 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)})/2
\end{aligned}$$

Pro $k = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -(2 + x_2^{(0)})/5 = -(2 + 0)/5 = -2/5 \\
x_2^{(1)} &= (1 - 3x_1^{(1)} - x_3^{(0)})/3 = (1 - 3(-2/5) - 0)/3 = 11/15 \\
x_3^{(1)} &= (-1 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)})/2 = (-1 - (-2/5) + 11/15)/2 = 1/15
\end{aligned}$$

První iterace je tedy $x^{(1)} = (-2/5,\, 11/15,\, 1/15)^T$. Druhá iterace:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -(2 + x_2^{(1)})/5 = -(2 + 11/15)/5 = -41/75 \\
x_2^{(2)} &= (1 - 3x_1^{(2)} - x_3^{(1)})/3 = (1 - 3(-41/75) - 1/15)/3 = 193/225 \\
x_3^{(2)} &= (-1 - x_1^{(2)} + x_2^{(2)})/2 = (-1 - (-41/75) + 193/225)/2 = 91/450
\end{aligned}$$

Druhá iterace je $x^{(2)} = (-41/75,\, 193/225, 91/450)^T$.

b) V Př. 3 jsme dokázali, že $A$ je ostře diagonálně dominantní, což je postačující podmínka pro konvergenci $GS$ metody.$GS$ metoda konverguje.

c) V Př. 3 jsme dokázali, že $B$ je symetrická a pozitivně definitní, což je postačující podmínka pro konvergenci $GS$ metody. Matice $C$ není o.d.d. ani pozitivně definitní, žádná z postačujcích podmínek pro konvergenci $GS$ metody pro matici $C$ tedy není splněna. Závěr: pro matici $B$ $GS$ metoda konverguje, pro matici $C$ o konvergenci $GS$ metody nevíme nic. Kdybychom chtěli poznat, zda $GS$ metoda konverguje i pro matici $C$, museli bychom spočítat spektrální poloměr odpovídající matice $U_G$.

**Příklad 8**

Rozhodněte, zda pro soustavu $Ax = b$ z Př. 6 bude konvergovat $GS$ metoda.

**Řešení**

Matice $A$ není o.d.d. ani symetrická, žádná z postačujcích podmínek pro konvergenci $GS$ metody tedy není splněna a musíme spočítat spektrální poloměr matice $U_G$. Vlastní čísla matice $U_G$ určíme z rovnice $\det(\lambda(L+D)+U) = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} 6\lambda & 11 & -1 \\ \lambda & 3\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 36\lambda^3 - 3\lambda^2 - 22\lambda^2 = \lambda^2(36\lambda - 25) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0, \ \lambda_3 = 25/36 \quad \Rightarrow \quad \rho(U_G) = 25/36 < 1.$$

Spektrální poloměr matice $U_G$ je menší než 1, takže $GS$ metoda konverguje.