

Normy matic

Příklad 1

Je dána matice A a vektor y :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Spočítejte všechny jejich normy (vektor je také matice, typu $n \times 1$).

Ověřte, že platí

$$\|Ay\| \leq \|A\| \cdot \|y\| \quad (1)$$

Řešení

$$Ay = (4, 14, -2)^T$$

Frobeniova norma - také někdy nazývaná *Euklidovská*:

$$\|A\|_2 = \sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{42} = 6.4807$$

$$\|y\|_2 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2.8284$$

$$\|Ay\|_2 = \sqrt{4^2 + 14^2 + (-2)^2} = 14.6969$$

$$14.6969 \leq 6.4807 \cdot 2.8284 = 18.3300$$

Sloupcová norma (po sloupcích sečteme absolutní hodnoty prvků matice a z nich vybereme maximum):

$$\|A\|_1 = \max(|2| + |3| + |-3|, 0 + |-4| + |-2|) = \max(8, 6) = 8$$

$$\|y\|_1 = |2| + |-2| = 4$$

$$\|Ay\|_1 = |4| + |14| + |-2| = 20$$

$$20 \leq 8 \cdot 4 = 32$$

Řádková norma (po řádcích sečteme absolutní hodnoty prvků matice a z nich vybereme maximum):

$$\|A\|_\infty = \max(|2| + 0, |3| + |-4|, |-3| + |-2|) = \max(2, 7, 5) = 7$$

$$\|y\|_\infty = \max(|2|, |-2|) = 2$$

$$\|Ay\|_\infty = \max(|4|, |14|, |-2|) = 14$$

$$14 \leq 7 \cdot 2 = 14$$

Pozor: ve vztahu (1) nesmíme míchat různé typy norem! Zkuste porovnat například $\|Ay\|_1$ a $\|A\|_2, \|y\|_2$.

Spektrální poloměr

Příklad 2

Určete spektrální poloměr matice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a ověřte, že platí $\rho(A) \leq \|A\|$ pro libovolnou normu této matice.

Řešení

$$\det(A - \lambda I) = (-2 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm i$$

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{(-2)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = \max(\sqrt{5}, \sqrt{5}) = \sqrt{5} = 2.2361$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{10} = 3.1623$$

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty = \max(|-2| + |-1|, |1| + |-2|) = \max(3, 3) = 3$$

$$2.2361 < 3.1623, \quad 2.2361 < 3.$$

Symetrie, pozitivní definitnost, diagonální dominance

Příklad 3

Jsou dány matice

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Která z nich je symetrická?
- Která je ostře diagonálně dominantní?
- Která je symetrická pozitivně definitní?

Řešení

a) Matice B a C jsou symetrické, matice A není.

b) Matice je *diagonálně dominantní* (zkráceně d.d.), právě když absolutní hodnota prvků na diagonále je větší nebo rovna součtu absolutních hodnot ostatních prvků - a to buď pro všechny řádky, nebo pro všechny sloupce. Matice je *ostře diagonálně dominantní* (zkráceně o.d.d.), jsou-li nerovnosti ostré.

Matice A :

$$\begin{array}{l} \text{řádky:} \\ \begin{array}{l} |-5| > |-1| + |0| \\ |3| < |3| + |1| \\ |2| \geq |1| + |-1| \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{sloupce:} \\ \begin{array}{l} |-5| > |3| + |1| \\ |3| > |-1| + |-1| \\ |2| > |1| + |0| \end{array} \end{array}$$

Ve druhém řádku podmínka neplatí $\Rightarrow A$ není d.d. po řádcích. Zkusíme tedy sloupce: podmínka platí pro všechny tři sloupce a navíc nerovnosti jsou ostré $\Rightarrow A$ je o.d.d. po sloupcích. Takže A je ostře diagonálně dominantní.

Matice B je symetrická - kontrolujeme jen řádky (sloupce vyjdou stejně):

$$\begin{array}{rcl} |1| & \geq & |-1| + |0| \\ |2| & \geq & |-1| + |-1| \\ |2| & > & |0| + |-1| \end{array}$$

Podmínka platí pro všechny řádky, nerovnost však není vždy ostrá $\Rightarrow B$ je diagonálně dominantní, ale ne ostře.

Matice C je symetrická - kontrolujeme jen řádky:

$$\begin{array}{rcl} |1| & \geq & |-1| + |0| \\ |1| & < & |-1| + |1| \\ |2| & > & |0| + |1| \end{array}$$

Matice C není diagonálně dominantní, ve druhém řádku (i sloupci) je podmínka porušena.

c) Symetrická matice je *pozitivně definitní*, právě když všechny její hlavní minory jsou kladné.

Matice A není symetrická.

Matice B :

$$\det(1) = 1 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 1 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 1 > 0$$

Všechny hlavní minory jsou kladné, matice B je tedy pozitivně definitní.

Matice C :

$$\det(1) = 1 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Druhý hlavní minor není kladný, dál už tedy nemusíme nic zkoumat. Matice C není pozitivně definitní.

Závěr: Matice A je ostře diagonálně dominantní, není symetrická ani pozitivně definitní. Matice B je diagonálně dominantní (ne však ostře), symetrická a pozitivně definitní. Matice C je symetrická, není diagonálně dominantní, ani pozitivně definitní.

Iterační metody

Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

Prostá iterační metoda (dále zkratka *pim*)

Soustavu $x = Ux + v$ řešíme tak, že

1. zvolíme $x^{(0)}$,
2. pro $k = 0, 1, 2, \dots$ počítáme $x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + v$, až $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$.

Podmínky konvergence:

$$\rho(U) < 1 \Leftrightarrow \textit{pim} \text{ konverguje}$$

$$\|U\| < 1 \Rightarrow \textit{pim} \text{ konverguje}$$

Řešení soustavy $Ax = b$

Postup: soustavu $Ax = b$ převedeme na soustavu $x = Ux + v$, a tu řešíme *pim*. Využijeme přitom vyjádření matice A jako součtu $A = L + D + U$, kde L je dolní trojúhelníková část, D je diagonála a U je horní trojúhelníková část.

Jacobiho metoda (dále zkratka J)

Soustavu $Ax = b$ vyjádříme jako $x = U_J x + v_J$, kde $U_J = -D^{-1}(L + U)$ a $v_J = D^{-1}b$. Tuto soustavu řešíme *pim*.

Podmínky konvergence:

$$\rho(U_J) < 1 \Leftrightarrow J \text{ konverguje}$$

$$A \text{ je o.d.d} \Rightarrow J \text{ konverguje}$$

Věta: vlastní čísla λ_i matice U_J lze získat řešením rovnice $\det(L + \lambda D + U) = 0$.

Gaussova-Seidelova metoda (dále zkratka GS)

Soustavu $Ax = b$ vyjádříme jako $x = U_G x + v_G$, kde $U_G = -(L + D)^{-1}U$ a $v_G = (L + D)^{-1}b$. Tuto soustavu řešíme *pim*.

Podmínky konvergence:

$$\rho(U_G) < 1 \Leftrightarrow GS \text{ konverguje}$$

$$A \text{ je o.d.d} \Rightarrow GS \text{ konverguje}$$

$$A \text{ je symetrická a pozitivně definitní} \Rightarrow GS \text{ konverguje}$$

Věta: vlastní čísla λ_i matice U_G lze získat řešením rovnice $\det(\lambda L + \lambda D + U) = 0$.

Prostá iterační metoda

Příklad 4

Je dána soustava rovnic $x = Ux + v$, kde

$$U = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- a) Zvolte $x^{(0)} = (0, 0)^T$ a spočítejte první tři iterace prostou iterační metodou.
- b) Dokažte, že *pim* pro tuto soustavu konverguje.

Řešení

a)

$$x^{(1)} = Ux^{(0)} + v = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Ux^{(1)} + v = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = Ux^{(2)} + v = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Nejdřív zkusíme, jestli platí některá z postačujících podmínek, protože se snáze spočítají:

$$\|U\|_1 = \max(|1/2| + |-5/4|, |1| + |-3/2|) = \max(7/4, 10/4) = 10/4 > 1$$

$$\|U\|_\infty = \max(|1/2| + |1|, |-5/4| + |-3/2|) = \max(3/2, 11/4) = 11/4 > 1$$

$$\|U\|_2 = \sqrt{(1/2)^2 + 1^2 + (-5/4)^2 + (-3/2)^2} = \sqrt{81/16} = 9/4 > 1$$

Žádná z norem není menší než 1, takže z nich nepoznáme nic.

Musíme tedy ověřit nutnou a postačující podmínku, tj. spočítat $\rho(U)$:

$$\det(U - \lambda I) = (1/2 - \lambda)(-3/2 - \lambda) + 5/4 = \lambda^2 + \lambda + 1/2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1/2 \pm 1/2i$$

$$\|\lambda_{1,2}\| = \sqrt{(1/2)^2 + (\pm 1/2)^2} = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2 \Rightarrow \rho(U) = \sqrt{2}/2 < 1$$

\Rightarrow *pim* konverguje.

Jacobiho metoda

Příklad 5

Je dána soustava rovnic $Ax = b$, kde A je matice z Příkladu 3 a $b = (2, 1, -1)^T$.

a) Zvolte $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ a spočítejte první dvě iterace J metodou.

b) Dokažte, že J pro tuto soustavu konverguje.

c) Lze na základě výsledků Př. 3 rozhodnout, zda J konverguje i pro matice B a C ?

Řešení

a) Jednotlivé iterace J metody se počítají lépe po složkách než v maticovém tvaru. Postup:

1. Napíšeme si soustavu po jednotlivých rovnicích:

$$\begin{aligned} -5x_1 - x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

2. Z každé rovnice vyjádříme diagonální prvek:

$$\begin{aligned} x_1 &= -(2 + x_2)/5 \\ x_2 &= (1 - 3x_1 - x_3)/3 \\ x_3 &= (-1 - x_1 + x_2)/2 \end{aligned} \tag{2}$$

3. Pro $k = 0, 1, 2, \dots$ počítáme $x^{(k+1)}$ tak, že do pravé strany (2) dosadíme složky předchozí iterace $x^{(k)}$:

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= -(2 + x_2^{(k)})/5 \\x_2^{(k+1)} &= (1 - 3x_1^{(k)} - x_3^{(k)})/3 \\x_3^{(k+1)} &= (-1 - x_1^{(k)} + x_2^{(k)})/2\end{aligned}$$

Pro $k = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -(2 + x_2^{(0)})/5 = -(2 + 0)/5 = -2/5 \\x_2^{(1)} &= (1 - 3x_1^{(0)} - x_3^{(0)})/3 = (1 - 0 - 0)/3 = 1/3 \\x_3^{(1)} &= (-1 - x_1^{(0)} + x_2^{(0)})/2 = (-1 - 0 + 0)/2 = -1/2\end{aligned}$$

První iterace je tedy $x^{(1)} = (-2/5, 1/3, -1/2)^T$. Druhá iterace:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -(2 + x_2^{(1)})/5 = -(2 + 1/3)/5 = -7/15 \\x_2^{(2)} &= (1 - 3x_1^{(1)} - x_3^{(1)})/3 = (1 - 3(-2/5) - (-1/2))/3 = 9/10 \\x_3^{(2)} &= (-1 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)})/2 = (-1 - (-2/5) + 1/3)/2 = -2/15\end{aligned}$$

Druhá iterace je $x^{(2)} = (-7/15, 9/10, -2/15)^T$.

b) V Př. 3 jsme dokázali, že A je ostře diagonálně dominantní, což je postačující podmínka pro konvergenci J metody.

c) Matice B ani C z Př. 3 nejsou o.d.d., postačující podmínka pro konvergenci J metody tedy není splněna a o konvergenci nevíme nic. Kdybychom chtěli poznat, zda J metoda konverguje, museli bychom spočítat spektrální poloměr matice U_J , což pro matici 3×3 obecně není snadné.

Příklad 6

Rozhodněte, zda pro soustavu $Ax = b$ bude konvergovat J metoda, je-li dáno

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Řešení

Matice není o.d.d., postačující podmínka pro konvergenci J metody tedy neplatí a musíme spočítat spektrální poloměr matice U_J . Vlastní čísla matice U_J určíme z rovnice $\det(L + \lambda D + U) = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} 6\lambda & 11 & -1 \\ 1 & 3\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 36\lambda^3 - 3\lambda - 22\lambda = \lambda(36\lambda^2 - 25) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm 5/6 \Rightarrow \rho(U_J) = 5/6 < 1.$$

Spektrální poloměr matice U_J je menší než 1, takže J metoda konverguje.

Gaussova-Seidelova metoda

Příklad 7

Je dána soustava rovnic $Ax = b$, kde A je matice z Příkladu 3 a $b = (2, 1, -1)^T$.

- Zvolte $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ a spočítejte první dvě iterace GS metodou.
- Dokažte, že GS pro tuto soustavu konverguje.
- Lze na základě výsledků Př. 3 rozhodnout, zda GS konverguje i pro matice B a C ?

Řešení

a) Jednotlivé iterace GS metody se počítají lépe po složkách než v maticovém tvaru. Postup:

- Napišeme si soustavu po jednotlivých rovnicích - stejně jako u J metody, viz Př.5.
- Z každé rovnice vyjádříme diagonální prvek - stejně jako u J metody, viz Př.5.
- Pro $k = 0, 1, 2, \dots$ počítáme $x^{(k+1)}$ po jednotlivých rovnicích, počínaje první. Začneme jako u J metody, ale jakmile spočítáme novou složku, hned ji dosadíme do pravé strany všech zbývajících rovnic (2):

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= -(2 + x_2^{(k)})/5 \\x_2^{(k+1)} &= (1 - 3x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)})/3 \\x_3^{(k+1)} &= (-1 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)})/2\end{aligned}$$

Pro $k = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -(2 + x_2^{(0)})/5 = -(2 + 0)/5 = -2/5 \\x_2^{(1)} &= (1 - 3x_1^{(1)} - x_3^{(0)})/3 = (1 - 3(-2/5) - 0)/3 = 11/15 \\x_3^{(1)} &= (-1 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)})/2 = (-1 - (-2/5) + 11/15)/2 = 1/15\end{aligned}$$

První iterace je tedy $x^{(1)} = (-2/5, 11/15, 1/15)^T$. Druhá iterace:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -(2 + x_2^{(1)})/5 = -(2 + 11/15)/5 = -41/75 \\x_2^{(2)} &= (1 - 3x_1^{(2)} - x_3^{(1)})/3 = (1 - 3(-41/75) - 1/15)/3 = 193/225 \\x_3^{(2)} &= (-1 - x_1^{(2)} + x_2^{(2)})/2 = (-1 - (-41/75) + 193/225)/2 = 91/450\end{aligned}$$

Druhá iterace je $x^{(2)} = (-41/75, 193/225, 91/450)^T$.

b) V Př. 3 jsme dokázali, že A je ostře diagonálně dominantní, což je postačující podmínka pro konvergenci GS metody. GS metoda konverguje.

c) V Př. 3 jsme dokázali, že B je symetrická a pozitivně definitní, což je postačující podmínka pro konvergenci GS metody. Matice C není o.d.d. ani pozitivně definitní, žádná z postačujících podmínek pro konvergenci GS metody

pro matici C tedy není splněna. Závěr: pro matici B GS metoda konverguje, pro matici C o konvergenci GS metody nevíme nic. Kdybychom chtěli poznat, zda GS metoda konverguje i pro matici C , museli bychom spočítat spektrální poloměr odpovídající matice U_G .

Příklad 8

Rozhodněte, zda pro soustavu $Ax = b$ z Př. 6 bude konvergovat GS metoda.

Řešení

Matice A není o.d.d. ani symetrická, žádná z postačujících podmínek pro konvergenci GS metody tedy není splněna a musíme spočítat spektrální poloměr matice U_G . Vlastní čísla matice U_G určíme z rovnice $\det(\lambda(L+D)+U) = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} 6\lambda & 11 & -1 \\ \lambda & 3\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 36\lambda^3 - 3\lambda^2 - 22\lambda^2 = \lambda^2(36\lambda - 25) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 25/36 \Rightarrow \rho(U_G) = 25/36 < 1.$$

Spektrální poloměr matice U_G je menší než 1, takže GS metoda konverguje.