

Parciální diferenciální rovnice

Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

Smíšená úloha pro rovnici vlny - metoda sítí

Hledáme funkci $u \equiv u(x, t)$, která vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{na dané oblasti } \Omega = (a, b) \times (0, T)$$

má předepsané počáteční podmínky v čase $t = 0$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \phi(x) \quad \text{pro } x \in \langle a, b \rangle \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \psi(x) \quad \text{pro } x \in \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

a splňuje okrajové podmínky pro $t > 0$

$$u(a, t) = \alpha(t), \quad u(b, t) = \beta(t)$$

Kladná konstanta c představuje rychlost vlny.

Počáteční a okrajové podmínky musí být navzájem kompatibilní, tj. musí splňovat tzv. *podmínky souhlasu*:

$$\phi(a) = \alpha(0), \quad \phi(b) = \beta(0), \quad \psi(a) = \alpha'(0), \quad \psi(b) = \beta'(0)$$

Metoda sítí

- Zvolíme krok h ve směru x a krok τ ve směru t a oblast Ω pokryjeme sítí, která má uzly $P_i^{(k)} = [x_i, t_k]$, kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $x_{i+1} = x_i + h$, $0 = t_0 < t_1 < \dots$, $t_{k+1} = t_k + \tau$. Přibližnou hodnotu řešení v uzlu $P_i^{(k)}$ označíme jako $U_i^{(k)}$, tj. $U_i^{(k)} \approx u(x_i, t_k)$.
Označíme $\sigma = \frac{c\tau}{h}$.

- Hodnoty na levé a pravé hranici jsou dány okrajovými podmínkami, hodnoty ve výchozí časové vrstvě jsou dány počáteční podmínkou $\phi(x)$ a hodnoty v první časové vrstvě se extrapolují z výchozí časové vrstvy jako

$$\begin{aligned} U_i^{(1)} &= \phi(x_i) + \tau\psi(x_i), \quad \text{nebo} \\ U_i^{(1)} &= (1 - \sigma^2)\phi(x_i) + \frac{1}{2}\sigma^2(\phi(x_{i-1}) + \phi(x_{i+1})) + \tau\psi(x_i). \end{aligned}$$

- **Explicitní schéma:** V každém vnitřním uzlu $P_i^{(k+1)}$ druhé a dalších časových vrstev vypočítáme přibližnou hodnotu $U_i^{(k+1)}$ ze známých hodnot v předcházejících dvou časových vrstvách jako:

$$U_i^{(k+1)} = 2(1 - \sigma^2)U_i^{(k)} + \sigma^2(U_{i-1}^{(k)} + U_{i+1}^{(k)}) - U_i^{(k-1)} + \tau^2 f(x_i, t_k).$$

Podmínka stability: $\sigma \leq 1$.

- **Implicitní schéma:** Hodnoty $U_i^{(k+1)}$ ve vnitřních uzlech $(k+1)$ -ní časové vrstvy vypočítáme z již známých hodnot $U_j^{(k)}, U_j^{(k-1)}$ v předchozích dvou časových vrstvách řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} -\sigma^2 U_{i-1}^{(k+1)} + 2(1 + \sigma^2) U_i^{(k+1)} - \sigma^2 U_{i+1}^{(k+1)} &= \\ &= \sigma^2 U_{i-1}^{(k-1)} - 2(1 + \sigma^2) U_i^{(k-1)} + \sigma^2 U_{i+1}^{(k-1)} + 4U_i^{(k)} + 2\tau^2 f(x_i, t_k) . \end{aligned}$$

Implicitní schéma je nepodmíněně stabilní.

Příklad 1

Je dána rovnice vlny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \quad \text{na oblasti } \Omega = (-1, 1) \times (0, T)$$

s počátečními podmínkami

$$u(x, 0) = 2x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = (1-x) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad \text{pro } x \in \langle -1, 1 \rangle$$

a okrajovými podmínkami $u(-1, t) = k e^{-t}$, $u(1, t) = 2$ pro $t > 0$.

- Určete hodnotu parametru k , aby byly splněny podmínky souhlasu.
- Vypočítejte přibližnou hodnotu výchylky v bodě $x = 0.8$ v čase $t = 0.24$ explicitní metodou sítí. Zvolte krok $h = 0.2$ a τ co největší tak, aby metoda byla stabilní.

Řešení

a) Podmínky souhlasu v bodě $[-1, 0]$:

poč. podm.:

$$\begin{aligned} u(-1, 0) &= 2x^2|_{x=-1} = 2 \cdot (-1)^2 = 2 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(-1, 0) &= (1-x) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)|_{x=-1} = (1-(-1)) \sin\left(\frac{\pi \cdot (-1)}{2}\right) = 2 \cdot (-1) = -2 \end{aligned}$$

okr. podm.:

$$\begin{aligned} u(-1, 0) &= k e^{-t}|_{t=0} = k e^0 = k \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= -k e^{-t}|_{t=0} = -k \end{aligned}$$

podmínky souhlasí $\Leftrightarrow k = 2$.

b) Časový krok τ musí splňovat podmínku stability $\sigma = \frac{c\tau}{h} \leq 1$, tj.

$$\tau \leq 1 \cdot \frac{h}{c} = \frac{0.2}{\sqrt{4}} = 0.1. \text{ Zvolíme co největší hodnotu } \tau \leq 0.1, \text{ aby bod } [0.8, 0.24]$$

$$\text{byl uzlem sítě: } \tau = 0.08, \text{ takže } \sigma = \frac{c\tau}{h} = \frac{2 \cdot 0.08}{0.2} = 0.8.$$

Připravíme si tabulku, kam si budeme postupně po řádcích zdola nahoru zapisovat řešení tak, jak ho budeme postupně počítat po jednotlivých časových vrstvách. V tabulce jsou vyznačeny jen hodnoty, které budeme pro výpočet potřebovat. Hlavní rozdíl od řešení rovnice vedení tepla je v tom, že teď musíme z počátečních podmínek vypočítat *dvě* časové vrstvy, nultou (modrá) a první (zelená). Schéma tabulky:

t_3	0.24		...				U_9^3		
t_2	0.16		...			U_8^2	U_9^2	U_{10}^2	
t_1	0.08		...		U_7^1	U_8^1	U_9^1	U_{10}^1	
t_0	0.0		...		U_7^0	U_8^0	U_9^0	U_{10}^0	
			-1.0	...	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
			x_0	...	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}

Nejdřív spočítáme z počátečních podmínek nultou a první časovou vrstvu a z okrajové podmínky poslední sloupec:

$$U_7^0 = u(x_7, 0) = 2 \cdot x_7^2 = 2 \cdot 0.4^2 = 0.32$$

$$U_8^0 = u(x_8, 0) = 2 \cdot 0.6^2 = 0.72$$

$$U_9^0 = u(x_9, 0) = 2 \cdot 0.8^2 = 1.28$$

$$\begin{aligned} U_7^1 &= U_7^0 + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_7, 0) = U_7^0 + \tau(1 - x_7) \sin\left(\frac{\pi x_7}{2}\right) = \\ &= 0.32 + 0.08 \cdot (1 - 0.4) \sin\left(\frac{0.4\pi}{2}\right) = 0.3482 \end{aligned}$$

$$U_8^1 = U_8^0 + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_8, 0) = 0.72 + 0.08 \cdot (1 - 0.6) \sin\left(\frac{0.6\pi}{2}\right) = 0.7459$$

$$U_9^1 = U_9^0 + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_9, 0) = 1.28 + 0.08 \cdot (1 - 0.8) \sin\left(\frac{0.8\pi}{2}\right) = 1.2952$$

Pak postupně dopočítáme hodnoty v jednotlivých časových vrstvách, vždycky přitom použijeme hodnoty z předchozích dvou řádků:

Druhá vrstva ($t_2 = 0.16$):

$$\begin{aligned} U_8^2 &= 2 \cdot (1 - \sigma^2) U_8^1 + \sigma^2 (U_7^1 + U_9^1) - U_8^0 + \tau^2 f(x_8, t_1) = \\ &= 2 \cdot (1 - 0.64) \cdot 0.7459 + 0.64 (0.3482 + 1.2952) - 0.72 + 0.0064 \cdot (2 \cdot 0.6) = \\ &= 0.8765 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_9^2 &= 2 \cdot (1 - \sigma^2) U_9^1 + \sigma^2 (U_8^1 + U_{10}^1) - U_9^0 + \tau^2 f(x_9, t_1) = \\ &= 2 \cdot 0.36 \cdot 1.2952 + 0.64 (0.7459 + 2) - 1.28 + 0.0064 \cdot (2 \cdot 0.8) = 1.4202 \end{aligned}$$

Třetí vrstva ($t_3 = 0.24$):

$$\begin{aligned} U_9^3 &= 2 \cdot (1 - \sigma^2) U_9^2 + \sigma^2 (U_8^2 + U_{10}^2) - U_9^1 + \tau^2 f(x_9, t_2) = \\ &= 2 \cdot 0.36 \cdot 1.4202 + 0.64 (0.8765 + 2) - 1.2952 + 0.0064 \cdot (2 \cdot 0.8) = 1.5785 \end{aligned}$$

Přibližná hodnota výchyly v bodě $x = 0.8$ v čase $t = 0.24$ je $U_9^3 = 1.5785$.

t_3	0.24		...					1.5785	
t_2	0.16		...			0.8765	1.4202	2.0000	
t_1	0.08		...		0.3482	0.7459	1.2952	2.0000	
t_0	0.0		...		0.3200	0.7200	1.2800	2.0000	
		-1.0	...	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
		x_0	...	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	