

Parciální diferenciální rovnice

Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

Lineární PDR 2. řádu ve 2 proměnných

Hledáme funkci $u \equiv u(x, y)$, která na dané oblasti Ω vyhovuje rovnici

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + hu = f$$

kde $a(x, y), b(x, y), \dots, h(x, y)$ a $f(x, y)$ jsou funkce spojité na Ω .

Klasifikace lin. PDR 2. řádu

Položme $r(x, y) = (b(x, y))^2 - 4a(x, y)c(x, y)$.

Podle znaménka funkce $r(x, y)$ potom rozlišujeme rovnice na

- eliptické $\dots r(x, y) < 0$ (např. Poissonova rovnice)
- parabolické $\dots r(x, y) = 0$ (např. rovnice vedení tepla)
- hyperbolické $\dots r(x, y) > 0$ (např. rovnice vlny)

Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici - metoda sítí

Hledáme funkci $u \equiv u(x, y)$, která vyhovuje rovnici

$$-\Delta u = f(x, y), \quad \text{kde} \quad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

na dané oblasti Ω a má předepsané hodnoty $u(x, y) = \phi(x, y)$ na její hranici Γ .

- Zvolíme krok h (tj. velikost ok sítě) a oblast Ω pokryjeme čtvercovou sítí tak, aby žádná hrana sítě neprotínala hranici Γ (v úlohách úrovně B to obvykle jde; jinak musíme použít lineární interpolaci).
- Uzly sítě uvnitř Ω označíme jako $P_i = [x_i, y_i]$, $i = 1, \dots, n$. Přibližnou hodnotu řešení v uzlu P_i označíme jako U_i , tj. $U_i \approx u(x_i, y_i)$.
- V každém uzlu sítě P_i uvnitř Ω sestavíme jednu rovnici svazující dohromady přibližnou hodnotu U_i v tomto uzlu s hodnotami U_H, U_D, U_L a U_P v sousedních uzlech P_H, P_D, P_L a P_P (horní, dolní, levý a pravý soused):

$$4U_i - U_H - U_D - U_L - U_P = h^2 f(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Pokud některý ze sousedních uzlů leží na hranici Γ , dosadíme do rovnice odpovídající předepsanou hodnotu a převedeme na pravou stranu rovnice.

- Řešením výsledné soustavy n rovnic pro n neznámých U_1, \dots, U_n získáme přibližné hodnoty řešení ve vnitřních uzlech sítě.

Příklad 1

Je dána rovnice

$$x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 0.25 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + 2y$$

Zjistěte, jakého typu tato rovnice je.

Řešení

Zajímá nás znaménko funkce

$$r(x, y) = (b(x, y))^2 - 4a(x, y)c(x, y) = (-xy)^2 - 4x^2y^2 \cdot 0.25 = 0.$$

Funkce $r(x, y)$ je pro všechna x, y nulová, takže daná rovnice je parabolická (na libovolné oblasti).

Příklad 2

Je dána Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici

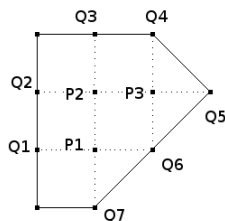
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y - x \quad \text{na } \Omega, \quad u(x, y) = y \quad \text{na } \Gamma$$

kde Ω je pětiúhelník s vrcholy $[-1, 0]$, $[-1, 1.5]$, $[0, 1.5]$, $[0.5, 1]$ a $[-0.5, 0]$.

Zvolte krok sítě $h = 0.5$ a vypočítejte řešení v bodě $[-0.5, 1]$ metodou sítí.

Řešení

Abychom vypočítali přibližnou hodnotu řešení v některém bodě, musíme vypočítat hodnoty ve všech vnitřních uzlech oblasti. Nejdřív nakreslíme obrázek a označíme uzly, které budeme potřebovat:



Obr. 1: Daná oblast s vyznačenými vnitřními (P_i) a hraničními (Q_j) uzly.

Máme tři vnitřní uzly $P_1 = [-0.5, 0.5]$, $P_2 = [-0.5, 1]$ a $P_3 = [0, 1]$ a celkem 9 uzlů na hranici, z nichž budeme potřebovat jen sedm označených jako Q_j .

Chceme vypočítat přibližné hodnoty U_1 , U_2 a U_3 řešení v uzlech P_i . Hodnoty v uzlech Q_j si předem spočítáme z okrajové podmínky:

$$\begin{aligned}u(Q_1) &= u(-1, 0.5) = 0.5 \\u(Q_2) &= u(-1, 1) = 1 \\u(Q_3) &= u(-0.5, 1.5) = 1.5 \\u(Q_4) &= u(0, 1.5) = 1.5 \\u(Q_5) &= u(0.5, 1) = 1 \\u(Q_6) &= u(0, 0.5) = 0.5 \\u(Q_7) &= u(-0.5, 0) = 0\end{aligned}$$

Dále si připravíme hodnoty $f(P_i)$:

$$\begin{aligned}f(P_1) &= y_1 - x_1 = 0.5 - (-0.5) = 1 \\f(P_2) &= y_2 - x_2 = 1 - (-0.5) = 1.5 \\f(P_3) &= y_3 - x_3 = 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

Nyní v každém uzlu P_i sestavíme jednu rovnici (a postupně ji upravíme):

P_1 :

$$\begin{aligned}4U_1 - U_2 - u(Q_1) - u(Q_6) - u(Q_7) &= -h^2 f(P_1) \\4U_1 - U_2 &= -h^2 f(P_1) + u(Q_1) + u(Q_6) + u(Q_7) \\4U_1 - U_2 &= -0.25 \cdot 1 + 0.5 + 0.5 + 0 = 0.75 \\4U_1 - U_2 &= 0.75\end{aligned}$$

P_2 :

$$\begin{aligned}4U_2 - U_1 - U_3 - u(Q_2) - u(Q_3) &= -h^2 f(P_2) \\4U_2 - U_1 - U_3 &= -h^2 f(P_2) + u(Q_2) + u(Q_3) \\4U_2 - U_1 - U_3 &= -0.25 \cdot 1.5 + 1 + 1.5 = 2.125 \\4U_2 - U_1 - U_3 &= 2.125\end{aligned}$$

P_3 :

$$\begin{aligned}4U_3 - U_2 - u(Q_4) - u(Q_5) - u(Q_6) &= -h^2 f(P_3) \\4U_3 - U_2 &= -h^2 f(P_3) + u(Q_4) + u(Q_5) + u(Q_6) \\4U_3 - U_2 &= -0.25 \cdot 1 + 1.5 + 1 + 0.5 = 2.75 \\4U_3 - U_2 &= 2.75\end{aligned}$$

Výsledná soustava rovnic tedy je

$$\begin{aligned}4U_1 - U_2 &= 0.75 \\4U_2 - U_1 - U_3 &= 2.125 \\4U_3 - U_2 &= 2.75\end{aligned}$$

V maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 2.125 \\ 2.75 \end{bmatrix}$$

Řešení: $U_1 = 0.4018$, $U_2 = 0.8571$, $U_3 = 0.9018$.

Přibližné řešení v bodě $P_2 = [-0.5, 1]$ je $U_2 = 0.8571$.

Příklad 3

Uvažujme stejnou úlohu jako v Př. 2, jen s malou změnou tvaru oblasti Ω : posuneme její poslední vrchol trochu vpravo, takže oblast je nyní dána vrcholy $[-1, 0]$, $[-1, 1.5]$, $[0, 1.5]$, $[0.5, 1]$ a $[-0.3, 0]$.

Řešení

Nyní máme čtyři vnitřní uzly: *regulární* uzly P_1, P_2, P_3 (regulární uzel nemá žádného souseda vně $\bar{\Omega}$) a nový uzel $P_4 = [0, 0.5]$, který byl původně hraničním uzlem Q_6 . Uzel P_4 je *neregulární*, protože jeho pravý sousední uzel v síti už leží vně $\bar{\Omega}$, tj. vně oblasti Ω včetně její hranice (načrtněte si obrázek).

Pro regulární uzly sestavíme rovnice stejně jako předtím, jen s drobnou změnou: místo hodnoty $u(Q_6)$ zadané na hranici oblasti máme nyní novou neznámou U_4 :

P_1 :

$$\begin{aligned} 4U_1 - U_2 - U_4 - u(Q_1) - u(Q_7) &= -h^2 f(P_1) \\ 4U_1 - U_2 - U_4 &= -h^2 f(P_1) + u(Q_1) + u(Q_7) \\ 4U_1 - U_2 - U_4 &= -0.25 \cdot 1 + 0.5 + 0 = 0.25 \\ 4U_1 - U_2 - U_4 &= 0.25 \end{aligned}$$

P_2 :

$$\begin{aligned} 4U_2 - U_1 - U_3 - u(Q_2) - u(Q_3) &= -h^2 f(P_2) \\ \dots & \\ 4U_2 - U_1 - U_3 &= 2.125 \end{aligned}$$

P_3 :

$$\begin{aligned} 4U_3 - U_2 - U_4 - u(Q_4) - u(Q_5) &= -h^2 f(P_3) \\ 4U_3 - U_2 - U_4 &= -h^2 f(P_3) + u(Q_4) + u(Q_5) \\ 4U_3 - U_2 - U_4 &= -0.25 \cdot 1 + 1.5 + 1 = 2.25 \\ 4U_3 - U_2 - U_4 &= 2.25 \end{aligned}$$

Čtvrtou rovnicí (pro uzel P_4) získáme lineární interpolací z hodnot v P_1 a v pomocném bodě Q_8 – průsečíku přímky P_1P_4 a hranice oblasti. Využitím podobnosti trojúhelníků určíme $Q_8 = [0.1, 0.5]$ a spočítáme hodnotu na hranici jako $u(Q_8) = u(0.1, 0.5) = 0.5$. Lineární interpolací dostaneme:

$$\begin{aligned} (U_4 - U_1)/h &= (u(Q_8) - U_1)/(h + \text{dist}(P_4, Q_8)) \\ (U_4 - U_1)/0.5 &= (0.5 - U_1)/0.6 \\ 0.6U_4 - 0.1U_1 &= 0.25 \end{aligned}$$

Maticový zápis těchto rovnic je

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 2.125 \\ 2.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

a řešení: $U_1 = 0.3969$, $U_2 = 0.8547$, $U_3 = 0.8969$, $U_4 = 0.4828$.