ODR - Cauchyova úloha

Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

Úloha s počátečními podmínkami (Cauchyova) 1. řádu

Hledáme řešení $\mathbf{Y}(x)$ soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)) \quad \text{s počáteční podmínkou}\, \mathbf{Y}(x^{(0)}) = \mathbf{Y}^{(0)}\,, \tag{1}$$

kde

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \mathbf{Y}'(x) = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{bmatrix}, \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{bmatrix}$$

Existence a jednoznačnost řešení

Nechť funkce f_i jsou spojité v souvislé oblasti Ω a mají tam i spojité parciální derivace $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Pak každým bodem $[x^0, \mathbf{Y}^0] \in \Omega$ je určeno právě jedno maximální řešení takové, že $\mathbf{Y}(x^0) = \mathbf{Y}^0$ a $[x, \mathbf{Y}(x)] \subset \Omega$.

Soustava (1) se nazývá *lineární*, pokud funkce f_i jsou lineární vzhledem ke všem proměnným y_j , tj. mají tvar
$f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = g_{i0}(x) + g_{i1}(x)\, y_1 + g_{i2}(x)\, y_2 + ... + g_{in}(x)\, y_n$.

Pro linární soustavu platí:

Nechť jsou všechny funkce $g_{ij}(x)$ spojité na intervalu I. Pak pro každé $x^0 \in I$ je bodem $[x^0, \mathbf{Y}^0]$ určeno právě jedno maximální řešení definované na celém intervalu I takové, že $\mathbf{Y}(x^0) = \mathbf{Y}^0$.

Eulerova metoda

zvolíme krok h a pro $i = 0, 1, 2, \ldots$

1. spočítáme derivaci $\mathbf{K}$ vektorové funkce $\mathbf{Y}$ jako
   $\mathbf{K} = \mathbf{F}(x^{(i)},\, \mathbf{Y}^{(i)})$
2. položíme
   $x^{(i+1)} = x^{(i)} + h$
   $\mathbf{Y}^{(i+1)} = \mathbf{Y}^{(i)} + h\,\mathbf{K}$

Collatzova metoda

zvolíme krok h a pro $i = 0, 1, 2, \ldots$

1. spočítáme pomocný bod $[x_p, \mathbf{Y}_p]$ Eulerovou metodou s polovičním krokem:

$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(x^{(i)},\, \mathbf{Y}^{(i)})$

$x_p = x^{(i)} + \frac{1}{2}h$

$\mathbf{Y}_p = \mathbf{Y}^{(i)} + \frac{1}{2}h\,\mathbf{K}_1$

2. spočítáme derivaci $\mathbf{K}_2$ v pomocném bodě $[x_p, \mathbf{Y}_p]$

$\mathbf{K}_2 = \mathbf{F}(x_p,\, \mathbf{Y}_p)$

3. položíme

$x^{(i+1)} = x^{(i)} + h$

$\mathbf{Y}^{(i+1)} = \mathbf{Y}^{(i)} + h\,\mathbf{K}_2$

Úloha n-tého řádu

Hledáme řešení $y(x)$ diferenciální rovnice n-tého řádu

$$y^n(x) = f(x, y, y', y'', \ldots y^{n-1}) \quad \text{s počátečními podmínkami}$$

$$y(x^{(0)}) = y_1^{(0)}, \quad y'(x^{(0)}) = y_2^{(0)}, \quad \ldots \quad y^{n-1}(x^{(0)}) = y_n^{(0)} \tag{2}$$

Diferenciální rovnici n-tého řádu převedeme na soustavu n diferenciálních rovnic 1. řádu, kterou už umíme řešit např. Eulerovou nebo Collatzovou metodou: v rovnici (1) položíme $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, $\ldots y_n = y^{n-1}$, takže dostaneme

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Příklad 1

Je dána Cauchyova úloha $\quad y' = \dfrac{y}{x^2}\,, \quad y(1) = 2\ .$

1) Určete oblast existence a jednoznačnosti řešení úlohy.

2) Vypočítejte přibližnou hodnotu $y(1.4)$:
a) Eulerovou metodou s krokem $h = 0.2$,
b) Eulerovou metodou s krokem $h = 0.1$,
c) Collatzovou metodou s krokem $h = 0.2$.

Řešení

1) Funkce $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2}$ jsou spojité všude kromě osy y, takže rovnice má obecně dvě oblasti existence a jednoznačnosti:
$\Omega_1 = (-\infty, 0) \times (-\infty, \infty)$
$\Omega_2 = (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$
Počáteční podmínka $[1, 2]$ leží v oblasti Ω_2, a proto oblast existence a jednoznačnosti řešení dané úlohy je Ω_2.
(Vzhledem k tomu, že jde o lineární rovnici, stačilo ověřit pouze spojitost $f(x, y)$ vzhledem k x a mohli bychom určit také interval maximálního řešení jako $I = (0, \infty)$).

2) Výsledky jsou shrnuty v Tabulce 1 a pro Eulerovu metodu navíc znázorněny na Obrázku 1. Z výsledků je vidět, že Collatzova metoda dala přesnější výsledky než Eulerova, a to dokonce i než Eulerova s polovičním krokem (která je s ní srovnatelná co do pracnosti).

Postup:
a) $h = 0.2, \quad x^{(0)} = 1, \quad y^{(0)} = 2$

$$k = \frac{y^{(0)}}{(x^{(0)})^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h = 1 + 0.2 = 1.2, \quad y^{(1)} = y^{(0)} + h\,k = 2 + 0.2 \cdot 2 = 2.4$$

$$k = \frac{y^{(1)}}{(x^{(1)})^2} = \frac{2.4}{(1.2)^2} = 1.6667$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h = 1.2 + 0.2 = 1.4, \quad y^{(2)} = y^{(1)} + h\,k = 2.4 + 0.2 \cdot 1.6667 = 2.7333$$

$y(1.4)$ se přibližně rovná $y^{(2)} = 2.7333$.

b) Postupujeme analogicky jako v bodě a), dostáváme postupně hodnoty uvedené ve 2. sloupci Tabulky 1, $y(1.4)$ je přibližně rovno $y^{(4)} = 2.6979$.

	přesně	$h=0.1$ Euler.	$h=0.2$ Euler.	$h=0.2$ Collatz.
$x^{(i)}$	$y(x^{(i)})$	$y^{(i)}$	$y^{(i)}$	$y^{(i)}$
1	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
1.1	2.1903	2.2000		(2.2000)
1.2	2.3627	2.3818	2.4000	2.3636
1.2	2.5191	2.5472		(2.5278)
1.4	2.6614	2.6979	2.7333	2.6628
1.5	2.7912	2.8356		(2.7986)
1.6	2.9100	2.9616	3.0122	2.9115
1.7	3.0190	3.0773		(3.0253)
1.8	3.1192	3.1838	3.2476	3.1209
1.9	3.2118	3.2821		(3.2172)
2.0	3.2974	3.3730	3.4480	3.2992
2.1	3.3769	3.4573		

Tab. 1: **Příklad 1**. V prvním sloupci tabulky jsou hodnoty x, ve kterých počítáme přibližné řešení. Ve 2. sloupci je přesné řešení, ve 3. sloupci je přibližné řešení počítané Eulerovou metodou s krokem $h = 0.1$, ve 4. sloupci totéž s dvojnásobným krokem a v posledním sloupci je přibližné řešení počítané Collatzovou metodou s krokem $h = 0.2$. První čtyři sloupce jsou graficky znázorněny na obrázku 1.

c) $h = 0.2, \quad x^{(0)} = 1, \quad y^{(0)} = 2$

$$k_1 = \frac{y^{(0)}}{(x^{(0)})^2} = \frac{2}{1^2} = 2,$$

$$x_p = x^{(0)} + \tfrac{1}{2}h = 1 + 0.1 = 1.1, \qquad y_p = y^{(0)} + \tfrac{1}{2}h\,k_1 = 2 + 0.1 \cdot 2 = 2.2$$

$$k_2 = \frac{y_p}{x_p^2} = \frac{2.2}{1.1^2} = 1.8182$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h = 1 + 0.2 = 1.2, \quad y^{(1)} = y^{(0)} + h\,k_2 = 2 + 0.2 \cdot 1.8182 = 2.3636$$

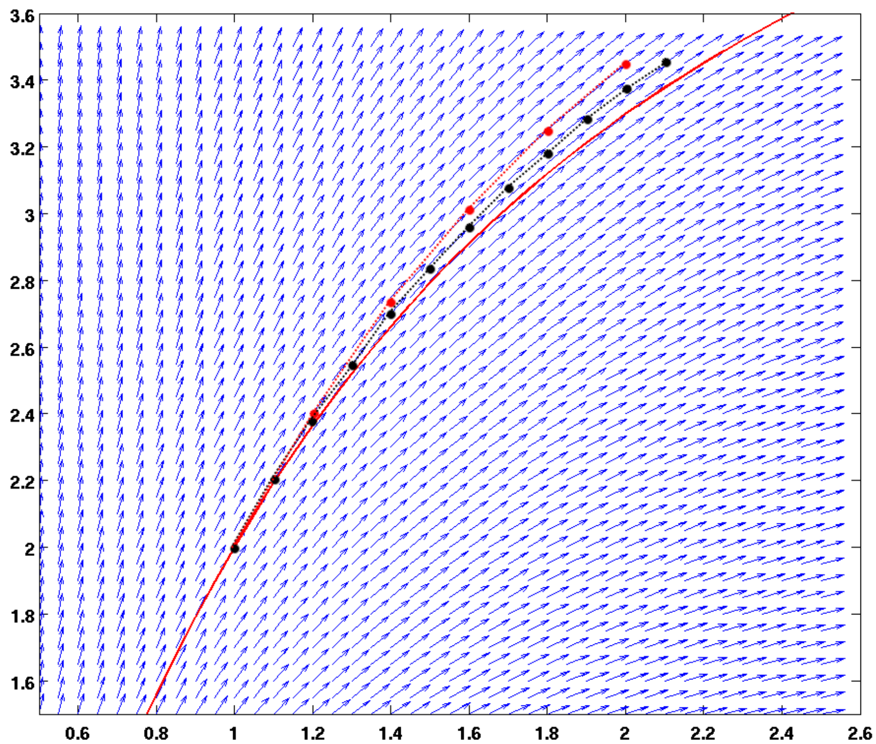
$$k_1 = \frac{y^{(1)}}{(x^{(1)})^2} = \frac{2.3636}{1.2^2} = 1.6414$$

$$x_p = x^{(1)} + \tfrac{1}{2}h = 1.2 + 0.1 = 1.3$$
$$y_p = y^{(1)} + \tfrac{1}{2}h\,k_1 = 2.3636 + 0.1 \cdot 1.6414 = 2.5278$$

$$k_2 = \frac{y_p}{x_p^2} = \frac{2.5278}{1.3^2} = 1.4957$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h = 1.2 + 0.2 = 1.4$$
$$y^{(2)} = y^{(1)} + h\,k_2 = 2.3636 + 0.2 \cdot 1.4957 = 2.6628$$

$y(1.4)$ se přibližně rovná $y^{(2)} = 2.6628$.



Obr. 1: **Př. 1**. Vodorovně osa x, svisle y. Modré šipky znázorňují směr tečny k integrální křivce procházející daným bodem. Plná červená čára zobrazuje přesné řešení úlohy s danou poč. podmínkou $y(x) = 2\,e^{1-1/x}$ (lze spočítat separací proměnných). Červené, resp. černé body představují přibližné řešení úlohy vypočtené Eulerovou metodou s krokem 0.2, resp. 0.1 (viz též Tab. 1).

Příklad 2

Je dána Cauchyova úloha

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} y_1 \sin(x) + y_3 \\ y_2 \ln(x+1) - 4 \\ 2y_1 \; - \; \dfrac{y_3}{x-2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Ověřte, že úloha má právě jedno řešení, a určete interval I jejího maximálního řešení.
b) Zvolte krok $h = 0.1$ a vypočítejte přibližnou hodnotu $\mathbf{Y}(1.2)$ Eulerovou metodou.
c) Zvolte krok $h = 0.2$ a vypočítejte přibližnou hodnotu $\mathbf{Y}(1.2)$ Collatzovou metodou.

Řešení

a) $x + 1 > 0 \;\Rightarrow\; x > -1, \quad x - 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 2 \qquad I_1 = (-1, 2),\; I_2 = (2, \infty)$
$x^{(0)} = 1 \in I_1 \Rightarrow$ interval maximálního řešení úlohy je $(-1, 2)$.

b) $x^{(0)} = 1$, $\mathbf{Y}^{(0)} = (-1, 1, 2)^T$, $h = 0.1$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}(x^{(0)}, \mathbf{Y}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1 \cdot \sin(1) + 2 \\ 1 \cdot \ln(1+1) - 4 \\ 2 \cdot (-1) \; - \; \dfrac{2}{1-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.84147 + 2 \\ 0.69315 - 4 \\ -2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1585 \\ -3.3068 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(0)} + h\,\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1.1585 \\ -3.3068 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8842 \\ 0.6693 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}(x^{(1)}, \mathbf{Y}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -0.8842 \cdot \sin(1.1) + 2 \\ 0.6693 \cdot \ln(1.1+1) - 4 \\ 2 \cdot (-0.8842) \; - \; \dfrac{2}{1.1-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7880 + 2 \\ 0.6693 \cdot 0.74194 - 4 \\ -1.7684 + 2.2222 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2120 \\ -3.5034 \\ 0.45380 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h = 1.1 + 0.1 = 1.2$$

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{Y}^{(1)} + h\,\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.8842 \\ 0.6693 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1.2120 \\ -3.5034 \\ 0.4538 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7630 \\ 0.3190 \\ 2.0454 \end{bmatrix}$$

Přibližná hodnota $\mathbf{Y}(1.2)$ je $\mathbf{Y}^{(2)} = (-0.7630, 0.3190, 2.0454)^T$.

c) $x^{(0)} = 1$, $\mathbf{Y}^{(0)} = (-1, 1, 2)^T$, $h = 0.2$:
$[x_p, \mathbf{Y}_p]$ je rovno $[x^{(1)}, \mathbf{Y}^{(1)}]$ z bodu b), takže můžeme použít už spočítanou hodnotu vektoru derivace v tomto bodě:

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{F}(x_p, \mathbf{Y}_p) = \begin{bmatrix} 1.2120 \\ -3.5034 \\ 0.45380 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(0)} + h\,\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 1.2120 \\ -3.5034 \\ 0.4538 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7576 \\ 0.2993 \\ 2.091 \end{bmatrix}$$

Přibližná hodnota $\mathbf{Y}(1.2)$ je $\mathbf{Y}^{(1)} = (-0.7782,\ 0.2993,\ 2.091)^T$.

Příklad 3 - harmonický oscilátor (tlumené kmity)

Je dána úloha $y'' + 2y' + y = e^{-t}$ s poč. podmínkami $y(0) = 2,\ y'(0) = -4$. Najděte řešení v čase $t = 0.2$. Použijte Eulerovu metodu s krokem $h = 0.1$.

Danou rovnici 2. řádu nejprve převedeme na soustavu dvou rovnic prvního řádu: položíme $y_1 = y$ a $y_2 = y'$ (tj. hledáme nyní dvě funkce: y_1 představující výchylku a y_2 rychlost). Platí $y_1' = y_2$ a $y_2' = e^t - 2y_2 - y_1$, tj.

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} y_2 \\ e^{-t} - 2y_2 - y_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$h = 0.1,\ \ t^{(0)} = 0,\ \ \mathbf{Y}^{(0)} = (2, -4)^T$,

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}(x^{(0)}, \mathbf{Y}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ e^0 - 2 \cdot (-4) - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$t^{(1)} = t^{(0)} + h = 0.1$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(0)} + h\,\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ -3.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}(x^{(1)}, \mathbf{Y}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -3.3 \\ e^{-0.1} - 2 \cdot (-3.3) - 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.3000 \\ 5.9048 \end{bmatrix}$$

$$t^{(2)} = t^{(1)} + h = 0.2$$

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{Y}^{(1)} + h\,\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ -3.3 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -3.3000 \\ 5.9048 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2700 \\ -2.7095 \end{bmatrix}$$

V čase $t = 0.2$ je výchylka $y(0.2)$ rovna přibližně 1.2700 a rychlost $y'(0.2)$ je rovna přibližně -2.7095.
(Přesné řešení je $y(t) = (2 - 2t + 0.5t^2)\,e^{-t}$, tj. $y(0.2) = 1.3263$.)

Příklad 4

Je dána Cauchyova úloha

$(x-1)y''' + 2xy'' + 5 \; = \; 2x^2y'' + (x-1)\sqrt{(y')^2 - 2}$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0,\; y'(0) = 2,\; y''(0) = -1$.

a) Určete oblast existence a jednoznačnosti řešení úlohy.
b) Vypočítejte přibližnou hodnotu $y'(0.1)$ Eulerovou metodou.

Řešení

Nejdřív převedeme rovnici na normální (kanonický) tvar:

$$y''' \; = \; \sqrt{(y')^2 - 2} \; + \; 2x\,y'' \; - \; \frac{5}{x-1}$$

Pak položíme $y_1 = y,\; y_2 = y',\; y_3 = y''$ a převedeme ji na soustavu 1. řádu:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \sqrt{(y_2)^2 - 2} \; + \; 2x\,y_3 \; - \; \dfrac{5}{x-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Funkce $y_2,\; y_3$ a $\sqrt{(y_2)^2 - 1} + 2x\,y_3 - \frac{5}{x-1}$ i jejich derivace podle y_i $\left(\frac{\partial f_3}{\partial y_2} = \frac{y_2}{\sqrt{(y_2)^2-2}}\right)$ jsou spojité pro $x \neq 1$ a $y_2 \notin \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$, tj. na oblastech

$\Omega_1 = (-\infty, 1) \times R \times (-\infty, -\sqrt{2}) \times R \quad , \quad \Omega_2 = (-\infty, 1) \times R \times (\sqrt{2}, \infty) \times R$
$\Omega_3 = (1, \infty) \times R \times (-\infty, -\sqrt{2}) \times R \quad , \quad \Omega_4 = (1, \infty) \times R \times (\sqrt{2}, \infty) \times R$

Počáteční podmínka $[0, 0, 2, -1]$ leží v oblasti Ω_2, a proto oblast existence a jednoznačnosti řešení dané úlohy je Ω_2 .

b) Máme $x^{(0)} = 0$, $\mathbf{Y}^{(0)} = (0, 2, -1)^T$ a zvolíme $h = 0.1$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}(x^{(0)}, \mathbf{Y}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2^2 - 2} \; + \; 2 \cdot 0 \cdot (-1) \; - \; \dfrac{5}{0-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2} \; + \; 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6.4142 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(0)} + h\,\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6.4142 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.9 \\ -0.3586 \end{bmatrix}$$

Přibližná hodnota $y'(0.1)$ je $y_2^{(1)} = 1.9$.