Interpolace a aproximace

Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

Interpolace pomocí polynomů

Jsou dány hodnoty nějaké funkce $y(x)$ v konečném počtu bodů; chceme je interpolovat polynomem $p(x)$, abychom mohli odhadnout hodnoty funkce $y(x)$ i mimo dané body. Označme jako $x_i,\ i = 0, 1, 2, \dots n$, zadané hodnoty nezávisle proměnné x a jako y_i předepsané hodnoty funkce $y(x)$ v bodech x_i. Zapišme dané hodnoty do tabulky:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Máme-li $n + 1$ daných bodů, existuje právě jeden polynom

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

stupně nejvýše n, který prochází všemi zadanými body. Jeho koeficienty $a_0, a_1, \dots a_n$ jsou určeny $n + 1$ lineárními rovnicemi

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n &= y_2 \\
&\dots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= y_n
\end{aligned} \tag{1}$$

– každá z nich představuje požadavek, aby polynom procházel jedním z bodů $[x_i, y_i]$, neboli $p(x_i) = y_i,\ i = 1, 2, \dots n$.

Maticově lze tuto soustavu zapsat jako $\mathbf{A}\,\mathbf{a} = \mathbf{y}$, jejímž řešením je vektor $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots a_n]^T$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad . \tag{2}$$

Aproximace pomocí polynomů

Opět předpokládáme, že známe $n+1$ hodnot nějaké funkce $y(x)$, a chceme je *aproximovat* pomocí polynomu $p(x)$, abychom mohli odhadnout hodnoty funkce $y(x)$ i mimo dané body. Nyní tedy slevíme z požadavku, aby graf polynomu *procházel* danými body, spokojíme se s tím, že bude ležet jen *blízko* nich. Zato však budeme požadovat, aby stupeň m tohoto polynomu byl hodně nízký, často m je menší než 3.

Poznámka: v případě aproximace již není nutné předpokládat, že x_i jsou navzájem různé hodnoty.

Metoda nejmenších čtverců

V rámci této metody termín *blízko* vyjadřuje nalezení minima kvadratické odchylky δ (nebo její druhé mocnicny δ^2), což představuje minimalizaci součtu druhých mocnin vzdáleností (ve směru y) daných bodů od grafu aproximačního polynomu, $r_i = p(x_i) - y_i$:

$$\delta^2 \equiv \sum_{i=0}^{n} r_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (p(x_i) - y_i)^2 \quad \rightarrow \quad min\ .$$

Funkci $\delta^2 \equiv S(a_0, a_1, \ldots a_m)$ minimalizujeme vzhledem k proměnným $a_0, a_1, \ldots a_m$ představujícím koeficienty hledaného polynomu $p(x)$. Minimum najdeme tak, že položíme parciální derivace funkce S rovny nule. Protože má $m+1$ proměnných, dostaneme $m+1$ rovnic

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial S}{\partial a_0} &= \sum_{i=0}^{n} 2r_i \frac{\partial r_i}{\partial a_0} = \sum_{i=0}^{n} 2r_i \\
0 = \frac{\partial S}{\partial a_1} &= \sum_{i=0}^{n} 2r_i \frac{\partial r_i}{\partial a_1} = \sum_{i=0}^{n} 2r_i x_i \\
0 = \frac{\partial S}{\partial a_2} &= \sum_{i=0}^{n} 2r_i \frac{\partial r_i}{\partial a_2} = \sum_{i=0}^{n} 2r_i x_i^2 \\
&\ldots \\
0 = \frac{\partial S}{\partial a_m} &= \sum_{i=0}^{n} 2r_i \frac{\partial r_i}{\partial a_m} = \sum_{i=0}^{n} 2r_i x_i^m
\end{aligned}$$

Po úpravách tuto soustavu rovnic můžeme vyjádřit maticově jako $\mathbf{A\,a} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \ldots a_m]^T$ je hledaný vektor řešení,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i & \ldots & \sum_{i=0}^n x_i^m \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \ldots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \ldots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \ldots & \sum_{i=0}^n x_i^{2m} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \\ \ldots \\ \sum_{i=0}^n x_i^m y_i \end{bmatrix} \tag{3}$$

Poznámka: levý horní prvek $n+1$ matice $\mathbf{A}$ představuje počet daných bodů

Příklad 1

Je dána následující tabulka bodů:

x	-1	1	2
y	8	4	5

Najděte interpolační polynom a použijte jej k odhadu hodnoty y v bodě $x = 0.5$.

Řešení

Jsou dány 3 body, takže budeme hledat polynom 2. stupně
$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, který má 3 neznámé koeficienty.
Sestavíme rovnice (2):

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 &= 8 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 &= 4 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 &= 5 \end{aligned}$$

nebo, v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad .$$

Řešení je $a_0 = 5$, $a_1 = -2$ a $a_2 = 1$, takže interpolační polynom je
$p_2(x) = 5 - 2x + x^2$.

Hodnotu y v bodě 0.5 odhadneme jako $p_2(0.5) = 5 - 2 \cdot 0.5 + 0.5^2 = 4.25$.

Příklad 2

Následující tabulkou je dáno 7 bodů:

x	-1	0	0	1	1	2	4
y	5	6	5	7	6	8	11

Najděte aproximační polynomy prvního a druhého stupně.

Řešení

Polynom **prvního** stupně je přímka $p_1(x) = a_0 + a_1x$, jejíž koeficienty jsou určeny soustavou rovnic (3), kde $m = 1$, $n = 6$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

Rozšíříme danou tabulku o dva řádky a jeden sloupec, které použijeme pro výpočet hodnot prvků matice a pravé strany:

								suma
x	-1	0	0	1	1	2	4	7
y	5	6	5	7	6	8	11	48
xy	-5	0	0	7	6	16	44	68
$\mathbf{x^2}$	1	0	0	1	1	4	16	23

Takto získáme soustavu pro dvě neznámé a_0 a a_1:

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 68 \end{bmatrix}.$$

Řešení je $a_0 = 5.6071$, $a_1 = 1.25$, lineární aproximace daných dat je $p_1(x) = 5.6071 + 1.25\,x$.

Polynom **druhého** stupně je parabola $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, jejíž koeficienty jsou určeny soustavou rovnic (3), kde $m = 2$, $n = 6$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \sum_{i=0}^{n} x_i^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

Rozšíříme tabulku o další tři řádky:

								suma
x	-1	0	0	1	1	2	4	7
y	5	6	5	7	6	8	11	48
xy	-5	0	0	7	6	16	44	68
$\mathbf{x^2}$	1	0	0	1	1	4	16	23
$\mathbf{x^2y}$	5	0	0	7	6	32	176	226
$\mathbf{x^3}$	-1	0	0	1	1	8	64	73
$\mathbf{x^4}$	1	0	0	1	1	16	256	275

Získáme sousatvu tří lineárních rovnic pro tři neznámé a_0, a_1 a a_2:

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 & 23 \\ 7 & 23 & 73 \\ 23 & 73 & 275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 68 \\ 226 \end{bmatrix}.$$

Řešení je $a_0 = 5.5856$, $a_1 = 0.8313$, $a_2 = 0.1340$; kvadratický polynom aproximující daná data je $p_1(x) = 5.5856 + 0.8313\,x + 0.1340\,x^2$.