Dvojný integrál - opakování

Testík:

$$\iint_D \sqrt{1-y^2}\ dxdy\ , \quad D = \{[x,y] \in R^2 :\ x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0\}$$

a) Daný dvojný integrál převeďte na dvojnásobný, oběma způsoby.
b) Zvolte jednu z možností a integrál vypočítejte.
c) Zdůvodněte, zda tento integrál vyjadřuje objem nějakého tělesa.
Toto těleso popište (tj. jeho hraniční plochy) a načrtněte.

Řešení:

a) Elementární obor integrace vzhledem k x: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$

$$\iint_D \sqrt{1-y^2}\ dxdy \ =^{FV} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\ dy\ dx$$

Elementární obor integrace vzhledem k y: $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$

$$\iint_D \sqrt{1-y^2}\ dxdy \ =^{FV} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\ dx\ dy$$

b) Jednodušší bude druhý způsob:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\ dx\ dy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1\ dx\ dy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\ \sqrt{1-y^2}\ dy =$$

$$= \int_0^1 1-y^2\ dy = \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

c) Integrál představuje objem tělesa s podstavou D, nahoře ohraničeného plochou $z = \sqrt{1-y^2}$, takže hraniční plochy jsou $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x^2+y^2=1,\ z=\sqrt{1-y^2}$.

Jak by to v bodě **b)** vycházelo prvním způsobem, pro ilustraci:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\ dy\ dx \left| \begin{array}{c} y = \sin t \\ dy = \cos t\, dt \\ \sqrt{1-x^2} \to \arcsin\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| = \int_0^1 \int_0^{\arcsin\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t\, dt\ dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\arcsin\sqrt{1-x^2}} \cos^2 t\, dt\ dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \int_0^{\arcsin\sqrt{1-x^2}} 1 + \cos 2t\, dt\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\arcsin\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \arcsin\sqrt{1-x^2} + \sin(\arcsin\sqrt{1-x^2}\,)\cdot\cos(\arcsin\sqrt{1-x^2}\,)\;dx \;\left|\begin{array}{c} x=\cos t\\ dx=-\sin t dt\\ \sqrt{1-x^2}=\sin t\\ \arcsin(\sin t)=t\\ 0\to\frac{\pi}{2}\\ 1\to 0\end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}(t+\sin t\cdot\cos t)\cdot\sin t\;dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin t\;dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\cos t\;dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left([t\,\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\;dt\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(0+1)+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

Trojný integrál - cylindrické souřadnice

Příklad 8.1

Určete objem tělesa M z příkladu 7.3 d), tj. omezeného plochami $z=x^2+y^2,\ z=8-x^2-y^2$.
Už jsme si určili $M_{xy}=\{[x,y]\in R^2:\ x^2+y^2\le 4\},\ x^2+y^2\le z\le 8-x^2-y^2$ a objem tedy už umíme počítat pomocí polárních takto:

$$V=\iiint\limits_M 1\;dxdydz \;=^{FV} \iint\limits_{M_{xy}}\left(\int\limits_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\;dz\right)\;dxdy = \iint\limits_{M_{xy}}(8-x^2-y^2)-(x^2+y^2)\;dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_{M_{xy}} 4-x^2-y^2\;dxdy\;\left|\begin{array}{c} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ dxdy\to r\,drd\varphi\\ 0\le r\le 2\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right| = 2\int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi}(4-r^2)\,r\,d\varphi\;dr =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} 1\;d\varphi\cdot\int\limits_0^2(4-r^2)\,r\,dr = 2\cdot 2\,\pi\;\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4\,\pi\,(8-4)=16\,\pi$$

Cylindrické souřadnice mohou výpočet zpřehlednit, protože jimi rovnou popíšeme celou množinu M:

$\widetilde{M}: 0\le r\le 2,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad r^2\le z\le 8-r^2$

Výpočet pomocí cylindrických souřadnic:

$$V=\iiint\limits_M 1\;dxdydz\left|\begin{array}{c} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\\ dxdydz\to r\,drd\varphi dz\end{array}\right| = \iiint\limits_{\widetilde{M}} r\;drd\varphi dz \;=^{FV} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2\int\limits_{r^2}^{8-r^2} r\;dz\;dr\;d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2(8-2r^2)\,r\,dr\;d\varphi = 2\int\limits_0^{2\pi}1\;d\varphi\cdot\int\limits_0^2(4-r^2)\,r\,dr = 2\cdot 2\,\pi\;\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4\,\pi\,(8-4)=16\,\pi$$

Příklad 8.2

Určete hmotnost tělesa M omezeného plochami $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = 6 - x^2 - y^2$, je-li $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + 1$.

Těleso má tvar podobný tělesu z příkladu 7.3 e), pouze ten paraboloid tvořící jeho horní hranici je posunutý výš po ose y. Meze pro z tedy budou $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$.

Průmět do roviny xy bychom mohli spočítat jako v příkladu 7.3 e), ale vzhledem k tomu, že jde o rotační plochy, ukážeme si jednodušší postup v cylindrických souřadnicích. Vyjádříme meze pro M v cylindrických souřadnicích jako $\sqrt{r^2} \leq z \leq 6 - r^2$ a najdeme průsečík horní a dolní meze pro z:

$r \geq 0$, takže $\sqrt{r^2} = r$ a hledáme kladný kořen rovnice $r = 6 - r^2$, což je $r = 2$.

Těleso M v cylidnrických souřadnicích můžeme tedy popsat jako

$\widetilde{M} : 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ r \leq z \leq 6 - r^2$.

$$m = \iiint\limits_M \rho(x,y,z)\ dxdydz = \iiint\limits_M x^2 + y^2 + 1\ dxdydz \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \\ dxdydz \to r\,drd\varphi dz \end{array} \right| =$$

$$= \iiint\limits_{\widetilde{M}} (r^2+1)\,r\,drd\varphi dz =^{FV} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\int\limits_r^{6-r^2} (r^2+1)\,r\ dz\ dr\ d\varphi = 2\pi \int\limits_0^2 (r^2+1)\,r \int\limits_r^{6-r^2} 1\ dz\ dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^2 (r^2+1)\,r\ (6 - r^2 - r)\ dr = 2\pi \int\limits_0^2 -r^5 - r^4 + 5r^3 - r^2 + 6r\ dr$$

$$= 2\pi \left[-\frac{r^6}{6} - \frac{r^5}{5} + 5\,\frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} + 3r^2 \right]_0^2 = 2\pi\,(-\frac{32}{3} - \frac{32}{5} + 5\cdot 4 - \frac{8}{3} + 12) = 2\pi\,\frac{184}{15}$$

Trojný integrál - sférické souřadnice

Příklad 8.3

Odvoďte vzorec pro objem koule K o ploměru R.

Koule ve sférických souřadnicích: $\widetilde{K} : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$

$$V = \iiint\limits_K 1\ dxdydz \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = r\sin\vartheta \\ dxdydz \to r^2\cos\vartheta\,drd\varphi d\vartheta \end{array} \right| = \iiint\limits_{\widetilde{K}} r^2\cos\vartheta\ drd\varphi d\vartheta =^{FV}$$

$$=^{FV} \int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi\ dr = \int\limits_0^R r^2\ dr \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\ d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \cdot 2\pi \cdot [\sin\vartheta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot (1 - (-1)) = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$$

Příklad 8.4

Vypočítejte integrál $\iiint\limits_W x^2+y^2\ dxdydz$, kde

$W = \{[x,y,z] \in R^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z^2-x^2-y^2 \geq 0,\ z \geq 0\}$.

První nerovnice představuje vnitřek koule o poloměru 2. Ze druhé podmínky vyjádříme z jako $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (vzhledem k poslední nerovnosti uvažujeme kladnou větev odmocniny). Těleso W tedy opět vypadá jako "kornoutek se zmrzlinou", horní plochu teď však netvoří paraboloid, ale kulová plocha.

Ve sférických souřadnicích:

$\widetilde{W}:\ 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.

Ještě si do sférických souřadnic předem převedeme integrovanou funkci:

$x^2+y^2 = r^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta = r^2\cos^2\vartheta$

$$\iiint\limits_W x^2+y^2\ dxdydz \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = r\sin\vartheta \\ dxdydz \to r^2\cos\vartheta\, drd\varphi d\vartheta \end{array} \right| = \iiint\limits_{\widetilde{W}} r^2\cos^2\vartheta\ r^2\cos\vartheta\ drd\varphi d\vartheta \ =^{FV}$$

$$=^{FV} \int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos^3\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi\ dr = \int\limits_0^2 r^4\ dr \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1\, d\varphi \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\vartheta\ d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 \cdot 2\pi \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\vartheta)\ \cos\vartheta\ d\vartheta = \frac{32}{5}\cdot 2\pi \left[\sin\vartheta - \frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{32}{5}\cdot 2\pi\left(\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\sin^3\frac{\pi}{2}}{3} - \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\sin^3\frac{\pi}{4}}{3}\right) = \frac{32}{5}\cdot 2\pi\left(1-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3\cdot 8}\right) =$$

$$= \frac{16}{15}\pi\,(8-5\sqrt{2})$$

Jak by to šlo v cylindrických souřadnicích:

Poloměr kružnice tvořící průmět W do roviny xy (postup jako v př. 8.2):

$4-x^2-y^2 = x^2+y^2 \quad\Rightarrow\quad 4-r^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad r=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\widetilde{W}:\ 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ r \leq z \leq \sqrt{4-r^2}$.

$$\iiint\limits_W x^2+y^2\ dxdydz \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \\ dxdydz \to r\, drd\varphi dz \end{array} \right| = \iiint\limits_{\widetilde{W}} r^2\cdot r\ drd\varphi dz \ =^{FV} \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} r^3\ dz\ d\varphi\ dr =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} r^3\ dz\ dr = 2\pi\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^3\int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} 1\ dz\ dr = 2\pi\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^3(\sqrt{4-r^2}-r)\ dr = 2\pi\left(\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^3\sqrt{4-r^2}\ dr - \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^4\ dr\right)$$

První integrál bychom řešili např. substitucí $t=4-r^2$, takže bychom dostali

$$\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^2\sqrt{4-r^2}\ r\ dr = -\frac{1}{2}\int\limits_4^{\frac{7}{2}} (4-t)\sqrt{t}\ dt.$$

Uměli bychom to tedy taky vyřešit, ale bylo by to o dost pracnější.