

Dvojný integrál - opakování

Testík – podobný příklad byste mohli čekat i u zkoušky:

$$\iint_D \sqrt{1-y^2} \, dx dy, \quad D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

- Daný dvojný integrál převedte na dvojnásobný, oběma způsoby.
- Zvolte jednu z možností a integrál vypočítejte.
- Zdůvodněte, zda tento integrál vyjadřuje objem nějakého tělesa.
Toto těleso popište (tj. jeho hraniční plochy) a načrtněte.

Trojný integrál - Fubiniova věta

Příklad 7.4

Spočítejte

$$\iiint_M x^2 \, dx dy dz, \quad \text{kde } M \text{ je množina z př. 7.3 b):}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4 - x - 2y\}$$

$$\text{tj. } M_{xy} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad 0 \leq z \leq 4 - x - 2y$$

$$\begin{aligned} \iiint_M x^2 \, dx dy dz &=^{FV} \iint_{M_{xy}} \left(\int_0^{4-x-2y} x^2 \, dz \right) dx dy = \iint_{M_{xy}} x^2 \left(\int_0^{4-x-2y} 1 \, dz \right) dx dy = \\ &= \iint_{M_{xy}} x^2 (4 - x - 2y) \, dx dy =^{FV} \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 (4 - x - 2y) \, dy \, dx = \\ &= \int_0^1 x^2 [4y - xy - y^2]_{y=0}^{1-x} dx = \int_0^1 x^2 (4(1-x) - x(1-x) - (1-x)^2) dx = \\ &= \int_0^1 3x^2 - 3x^3 dx = \left[x^3 - \frac{3x^4}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Příklad 7.5

Spočítejte

$$\iiint_M xy \, dx dy dz, \quad \text{kde } M \text{ je množina z př. 7.3 c),}$$

$$M: 0 \leq x \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2$$

$$\begin{aligned} \iiint_M xy \, dx dy dz &=^{FV} \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{9-x^2-y^2} xy \, dz \, dy \, dx = \int_0^2 x \int_0^1 y(9-x^2-y^2) \, dy \, dx = \\ &= \int_0^2 x \left[9 \frac{y^2}{2} - x^2 \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^1 dx = \frac{1}{4} \int_0^2 17x - 2x^3 \, dx = \frac{1}{4} \left[17 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right]_0^2 = \\ &= \frac{1}{4} (17 \cdot 2 - 8) = \frac{26}{4} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Příklad 7.6Určete moment setrvačnosti vzhledem k rovině yz tělesa
 $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, x + y - z \geq 0, z \geq 0\}$, je-li $\rho(x, y, z) = 1$.
 D je čtyřboký hranol rovnoběžný s osou z , dole seříznutý rovinou $z = 0$ a nahoře rovinou $z = x + y$, tedy $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq x + y$

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \iiint_D x^2 \rho(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_D x^2 \, dx dy dz =^{FV} \int_0^2 \int_0^3 \int_0^{x+y} x^2 \, dz \, dy \, dx = \\ &= \int_0^2 x^2 \int_0^3 \int_0^{x+y} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^2 x^2 \int_0^3 x + y \, dy \, dx = \int_0^2 x^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^3 dx = \\ &= \int_0^2 x^2 \left(3x + \frac{9}{2} \right) dx = 3 \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} \right]_0^2 = 3 \cdot (4 + 4) = 24 \end{aligned}$$

Příklad 7.7

Určete těžiště krychličky K o hraně a , která leží v prvním oktantu a jeden vrchol má v počátku (tj. $x \in \langle 0, a \rangle$, $y \in \langle 0, a \rangle$, $z \in \langle 0, a \rangle$), má-li hustotu $\rho(x, y, z) = z$.

$$T = \left[\frac{m_{yz}}{m}, \frac{m_{xz}}{m}, \frac{m_{xy}}{m} \right]$$

$$\begin{aligned} m_{xy} &= \iiint_K z \rho(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_K z^2 \, dx dy dz = {}^{FV} \int_0^a \int_0^a \int_0^a z^2 \, dz \, dy \, dx = \\ &= \int_0^a z^2 \, dz \cdot \int_0^a 1 \, dy \cdot \int_0^a 1 \, dx = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^a \cdot a \cdot a = \frac{a^5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{yz} &= \iiint_K x \rho(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_K xz \, dx dy dz = {}^{FV} \int_0^a \int_0^a \int_0^a xz \, dz \, dy \, dx = \\ &= \int_0^a z \, dz \cdot \int_0^a 1 \, dy \cdot \int_0^a x \, dx = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^a \cdot a \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{a^2}{2} \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^5}{4} \end{aligned}$$

$$m_{xz} = \dots \text{ analogicky jako } m_{yz} \dots = \frac{a^5}{4}$$

$$m = \iiint_K \rho(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_K z \, dx dy dz = {}^{FV} \int_0^a \int_0^a \int_0^a z \, dz \, dy \, dx = a^2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^a = \frac{a^4}{2}$$

$$T = \left[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{2a}{3} \right]$$