Dvojný integrál - opakování

Příklad 300 ze sbírky, dotaz: kde se vzaly meze pro r v závislosti na φ?

D je omezená kružnicemi $k_1: \; x^2+y^2+x=0$ a $k_2: \; x^2+y^2+4x=0$ a přímkami $y=x$ a $y=0$. Doplněním na čtverce zjistíme středy a poloměry kružnic, viz obrázek ve sbírce: $S_1=[-1/2,0]$, $r_1=1/2$, $S_2=[-2,0]$, $r_2=2$.

Z obrázku vidíme, že $\pi \leq \varphi \leq \frac{5}{4}\pi$. Teď hledáme meze pro r (představující vzdálenost od počátku), tj. hledáme průsečíky daných kružnic s polopřímkou vycházející z počátku a svírající úhel φ s osou x. Opět z obrázku vidíme, že dolní mez pro r je průsečík kružnici k_1 (to je ta menší) a horní mez s kružnicí k_2.
Dolní mez: pro pevné φ hledáme r tak, aby bod $[r,\varphi]$ ležel na k_1, má tedy platit

$x^2+y^2+x=0$,

kde $x=r\,\cos\varphi$, $y=r\,\sin\varphi$, $x^2+y^2=r^2$. Po dosazení dostaneme

$r^2+r\,\cos\varphi=0$, odtud dolní mez $r=-\cos\varphi$.

Podobně pro horní mez: pro pevné φ hledáme r tak, aby bod $[r,\varphi]$ ležel na k_2, tj.

$$x^2+y^2+4x=0 \quad \Rightarrow \quad r^2+4\,r\,\cos\varphi=0 \quad \Rightarrow \quad r=-4\,\cos\varphi \; .$$

Příklad 7.1

Určete váhu rovinné desky D, jejíž hranici tvoří kružnice $x^2+y^2=2y$ a která má plošnou hustotu $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Doplněním na čtverec dostaneme $x^2+(y-1)^2=1$ (znázorněte si graficky).

Vidíme, že bude asi vhodné použít polární souřadnice, ale které? Integrovanou funkci lépe popíšeme pomocí standardních polárních souřadnic, kdežto pro obor integrace by se líp hodily zobecněné souřadnice. Zkusíme postupně oboje, nejdřív standardní:

z obrázku vidíme, že kružnice, která tvoří hranice desky, leží v polorovině $0 \leq y$ a prochází počátkem, takže pro φ máme pevné meze $0 \leq \varphi \leq \pi$. Dolní mez pro r je nula a horní najdeme jako průsečík dané kružnice s přímkou procházející počátkem a svírající s osou x úhel φ (stejně jako v příkladu výše), tj.

$$x^2+y^2=2y \quad \Rightarrow \quad r^2=2\,r\,\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad r=2\,\sin\varphi \; .$$

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)\;dxdy=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\;dxdy \left| \begin{array}{c} x=r\,\cos\varphi \\ y=r\,\sin\varphi \\ 0\leq\varphi\leq\pi \\ 0\leq r\leq 2\,\sin\varphi \\ dx\,dy\to r\,dr\,d\varphi \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\,\sin\varphi}\sqrt{r^2}\;r\;dr\;d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\,\sin\varphi} r^2\;dr\;d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\,\sin\varphi}d\varphi=\int\limits_0^{\pi}\frac{8}{3}\,\sin^3\varphi\;d\varphi=\cdots=\frac{32}{9}$$

V zobecněných souřadnicích sice snadno určíme integrační meze, ale dostaneme integrál, který asi neumíme spočítat:

$$m = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy \left| \begin{array}{c} x = r\,\cos\varphi \\ y = 1 + r\,\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2\,\cos^2\varphi + (1 + r\,\sin\varphi)^2}\; r\; dr\; d\varphi.$$

Trojný integrál

Příklad 7.2 – podobně řešený př. 343 ve sbírce

Spočítejte následující integrál, kde M je kvádr $<0, \frac{\pi}{2}> \times <0,2> \times <\pi, 2\pi>$.

$$\iiint_M y\,\cos(x+z)\; dxdydz = \int_\pi^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,\cos(x+z)\; dx\; dy\; dz =$$

$$= \int_\pi^{2\pi}\int_0^2 y\;[\sin(x+z)]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\; dy\; dz = \int_\pi^{2\pi}\int_0^2 y\,(\sin(\frac{\pi}{2}+z) - \sin(z))\; dy\; dz =$$

$$= \int_\pi^{2\pi} \sin(\frac{\pi}{2}+z) - \sin(z)\; dz \cdot \int_0^2 y\; dy = \Big[-\cos(\frac{\pi}{2}+z) + \cos z\Big]_\pi^{2\pi} \cdot \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^2 =$$

$$= (-\cos(\frac{\pi}{2}+2\pi) + \cos(2\pi) + \cos\frac{3\pi}{2} - \cos\pi) \cdot 2 = (0 + 1 + 0 - (-1)) \cdot 2 = 4$$

Příklad 7.3

Pro zadání a) až e) načrtněte těleso M omezené danými plochami, resp. nerovnostmi, a zakreslete jeho průmět do roviny xy (tj. $z = 0$). Zapište je jako jednoduchý obor integrace vzhledem k rovině xy, tj. ve tvaru $\phi_1(x,y) \le z \le \phi_2(x,y)$, $[x,y] \in M_{xy}$, kde M_{xy} je průmět M do roviny xy.

a) $x^2 + y^2 \le 4,\ z \ge 0, z \le 3,\ y \ge 0$

b) $x + y \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + 2y + z \le 4$

c) $z = 9 - x^2 - y^2,\ x \le 2,\ y \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0,\ z \ge 0$

d) $z = x^2 + y^2,\ z = 8 - x^2 - y^2$

e) $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = 2 - x^2 - y^2$

Nápověda: rotační plochy s osou rotace z je užitečné představit si třeba tak, že nakreslíme 2D graf řezu rovinou xz, tj. v dané rovnici položíme $y = 0$, a pak si představíme, že to, co jsme nakreslili, rotuje kolem z.

a) $M_{xy} = \{[x,y] \in R^2 :\ x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\},\ 0 \leq z \leq 3$

b) $M_{xy} = \{[x,y] \in R^2 :\ x + y \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\},\ 0 \leq z \leq 4 - x - 2y$

c) $M_{xy} = \{[x,y] \in R^2 :\ x \in < 0, 2 >,\ y \in < 0, 1 >\},\ 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2$

d) $M_{xy} = \{[x,y] \in R^2 :\ x^2 + y^2 \leq 4\},\ x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2$

e) $M_{xy} = \{[x,y] \in R^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\},\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$