Matematika 5: Vlastní čísla a vlastní vektory čtvercových matic(pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Literatura:
[1] J. Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014, 2013.
[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: **Sbírka příkladů z Matematiky I**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014, 2013.

Poznámka: Varianty k níže uvedeným úlohám lze nalézt ve skriptu [2].

Definice: Číslo λ (může být i komplexní) nazýváme vlastním číslem čtvercové matice A, jestliže existuje nenulový vektor X takový, že $A \cdot X = \lambda\, X$. Vektor X se pak nazývá vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ.
Poznámka: K vlastnímu číslu existuje nekonečně mnoho vlastních vektorů.

Postup při výpočtu:

1. Nejprve řešíme charakteristickou rovnici matice A, tj. rovnici $\det(A - \lambda E) = 0$. Vlastní čísla matice A jsou kořeny této rovnice.

2. Ke každému vlastnímu číslu λ pak určíme odpovídající vlastní vektory $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ řešením soustavy homogenních lineárních rovnic $(A - \lambda\, E) \cdot X = O$.

Některé další vlastnosti:

a) Je-li λ vlastním číslem matice A s vlastním vektorem X, pak λ^2 je vlastním číslem matice A^2 se stejným vlastním vektorem X.

b) Jestliže existuje inverzní matice A^{-1}, pak λ je vlastním číslem matice A právě tehdy, když $1/\lambda$ je vlastním číslem inverzní matice A^{-1}. Odpovídající vlastní vektory jsou pro obě matice stejné.

c) Číslo $\lambda = 0$ je vlastním číslem matice A právě tehdy, když matice A je singulární.

d) Je-li λ je vlastním číslem matice A s vlastním vektorem X, pak $\overline{\lambda}$ je také vlastním číslem matice A, a to s vlastním vektorem $\overline{X}$.

Příklad a) Najděte vlastní čísla matice $$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Zvolte jedno z vlastních čísel, sestavte soustavu rovnic pro výpočet odpovídajících vlastních vektorů a ty pak určete.
c) Určete spektrální poloměr $\rho(A)$ dané matice, tj. největší z absolutních hodnot vlastních čísel matice A.

<u>Ř e š e n í :</u> a) Sestavíme charakteristickou rovnici $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -5 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Determinant vypočítáme rozvojem podle 1. řádku, což vede k rovnici

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)+5] = 0$$

$$(4-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 8] = 0.$$

Kořeny jsou $\lambda_1 = 4$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm 2\mathrm{i}$ a to jsou vlastní čísla matice A.

b) Určíme vlastní vektory $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, které odpovídají vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4$.

Získáme je řešením soustavy $(A - \lambda\, E) \cdot X = \overrightarrow{0}$, kde $\lambda = 4$, tj. $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ -1, & -3, & -5 \\ 2, & 1, & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Přepíšeme ve tvaru soustavy rovnic, ve které 1. rovnici vypustíme, neboť má všechny koeficinty nulové. Získáme tak soustavu dvou rovnic pro tři neznámé:

$$\begin{aligned} -x - 3y - 5z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Přičteme-li ke druhé rovnici dvojnásobek 1. rovnice (Gaussův algoritmus), získáme soustavu

$$\begin{aligned} -x - 3y - 5z &= 0 \\ -5y - 11z &= 0 \end{aligned}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení ("kontrolní místo"). Jednu neznámou lze volit, tedy např. $z = p$, kde p je libovolné číslo. Ze druhé rovnice určíme $y = -11p/5$.
Po dosazení do 1. rovnice vypočteme $x = -3y - 5z = 8p/5$.

Všechny vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4$ lze vyjádřit ve tvaru $X = p \cdot \begin{pmatrix} 8/5 \\ -11/5 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde p je jakékoliv číslo různé od 0. To lze zapsat též v jednodušším tvaru $X = p \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$, kde $p \neq 0$.

c) Spektrální poloměr $\rho(A) = \{\max|\lambda_{\rm i}|;\ {\rm i} = 1, ..., {\rm n}\} = \max\{4;\ |2+2{\rm i}|;\ |2-2{\rm i}|\} = \max\{4;\ \sqrt{8}\} = 4$.

Následující úlohy jsou vybrány ze zkoušek v předmětu Matematika IA.

1. Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Nalezněte vlastní čísla této matice. Určete její spektrální poloměr $\rho(A)$, tj. největší z absolutních hodnot vlastních čísel matice A.

b) Určete vlastní vektory.

[Výsl.: $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2{\rm i}$, $\rho(A) = 2\sqrt{2}$, pro λ_1 jsou vlastní vektory $X_1 = p\,(-5, 1 + 2{\rm i})^T$, $p \in \mathbb{C}, p \neq 0$; pro λ_2 jsou vlastní vektory $X_2 = p\,(-5, 1 - 2{\rm i})^T$, $p \in \mathbb{C}, p \neq 0$,

2. a) Určete vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 5, & 5, & -2 \\ -1, & 3, & 1 \\ 0, & 0, & 4 \end{pmatrix}$.

b) Určete vlastní vektory odpovídající reálným vlastním číslům této matice.

c) Určete vlastní čísla matice A^{-1}.

[Výsl.: $\det(A - \lambda E) = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 8\,\lambda + 20)$, matice A má vlastní číslo $\lambda_1 = 4$ a dvě komplexní vlastní čísla: $\lambda_{2,3} = 4 \pm 2{\rm i}$. Pro λ_1 jsou to vektory $X_1 = p\,(3, 1, 4)^T$, $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$. Matice A^{-1} existuje (proč ?) a její vlastní čísla jsou $1/\lambda_1 = 1/4, 1/\lambda_2 = (2 - {\rm i})/10, 1/\lambda_3 = (2 + {\rm i})/10$.]

3. Je dána matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

a) Uveďte vlastnost matice, která je postačující pro existenci nulového vlastního čísla.

b) Napište *charakteristický polynom* matice $\boldsymbol{A}$. Ověřte, zda čísla $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 4$ jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice.

c) Nalezněte *vlastní vektory* matice $\boldsymbol{A}$ příslušné vlastnímu číslu λ_2.

4. a) Definujte pojmy *vlastní číslo* a *vlastní vektor* čtvercové matice. Podle této definice zdůvodněte vlastnost matice, která je postačující pro existenci nulového vlastního čísla.

b) Vypočítejte vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \end{pmatrix}$.

c) Vypočítejte matici $B = A^2$ (tj. matici $A \cdot A$). Určete vlastní čísla matice B.

[Výsl.: a) Singularita matice (tj. např. $\det A = 0$), b) $\det(A-\lambda E) = -\lambda\,(2-\lambda)^2$, vlastní čísla jsou: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$, c) $B = A^2$ (po řádcích)= $(5, 2, -1;\ 2, 0, -2;\ 1, 2, 3)$, vlastní čísla matice A^2 jsou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$.]

5. a) Určete vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 0 \\ -13, & -1, & 0 \\ 4, & -8, & -2 \end{pmatrix}$.

b) Určete spektrální poloměr $\rho(A)$ dané matice, tj. největší z absolutních hodnot vlastních čísel matice A.

c) Určete vlastní vektory odpovídající reálným vlastním číslům dané matice.

[Výsl.: $\det(A - \lambda E) = (-2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\,\lambda + 10)$, vlastní číslo $\lambda_1 = -2$, dvě komplexní vlastní čísla: $\lambda_{2,3} = 1 \pm 3\mathrm{i}$, $\rho(A) = \sqrt{10}$; pro λ_1 jsou vlastní vektory $X_1 = p\,(0, 0, 1)^T$, $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$.