Matematika 5: Tečna ke grafu funkce, Taylorův polynom, Lagrangeův tvar zbytku, přibližný výpočet funkční hodnoty, odhad chyby (nepřesnosti) tohoto výpočtu (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Literatura:
[1] J. Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.
[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: **Sbírka příkladů z Matematiky I**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.
[3] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Diferenciální počet funkcé jedné proměnné** (řešené příklady). Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2007.

Poznámka: V uvedených textech lze nalézt varianty k níže uvedeným úlohám.

Předpoklad: Funkce f má derivace až do řádu n v bodě x_0. Pak Taylorův polynom n-tého stupně dané funkce f (se středem) v bodě x_0:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Lagrangeův tvar zbytku $R_{n+1}(x)$ vyjadřuje chybu (nepřesnost), které se dopustíme při nahrazení funkční hodnoty $f(x)$ hodnotou $T_n(x)$, tj. $R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$.

Věta (Taylorova). Nechť funkce f má spojité derivace až do řádu $n + 1$ v okolí $U(x_0)$ bodu x_0.

Pak pro každé $x \in U(x_0)$ existuje mezi body x_0 a x bod ξ tak, že $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Protože přesnou polohu bodu ξ zpravidla neznáme, můžeme zmíněnou nepřesnost pomocí tvaru zbytku pouze odhadnout shora. Lze použít odhad $|R_{n+1}(x)| \leq \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, kde M_{n+1} je maximum funkce $|f^{(n+1)}|$ na intervalu $\langle x_0, x\rangle$, resp. $\langle x, x_0\rangle$.

1. Je dána funkce $f(x) = x^2 + \ln x$.

a) Určete definiční obor dané funkce. Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 1$.

b) Napište Taylorovy polynomy $T_2(x)$ stupně 2 a $T_3(x)$ stupně 3 o středu $x_0 = 1$ zadané funkce f. Pomocí $T_3(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 3/2$ (ve tvaru zlomku).

c) Vypočítejte derivaci čtvrtého řádu dané funkce. Uveďte, co vyjadřuje zbytek $R_4(x)$. Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_4(x)$. Pomocí $R_4(3/2)$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(3/2)$ z úlohy b).

2 Je dána funkce $f(x) = \sqrt{2x+1} - \dfrac{x^2}{2}$

a) Vypočítejte 1. a 2. derivaci této funkce. Stanovte definiční obory funkcí f, f' a f''.

b) Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně dva se středem $x_0 = 0$ dané funkce f. Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 3/4$.

c) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Jeho pomocí odhadněte velikost chyby aproximace hodnoty funkce f v bodě $x = 3/4$ při použití Taylorova polynomu $T_2(x)$ z úlohy b).

[Výsl.:Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} - x$, $f''(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}} - 1$, $D(f) = \langle -1/2, \infty)$, $D(f') = D(f'') = (-1/2, \infty)$,
$T_2(x) = 1 + x - x^2$, $f(3/4) \doteq T_2(3/4) = 19/16 \doteq 1.2$, $f'''(x) = \dfrac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$, $R_3(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{(2\xi+1)^5}}\, x^3$,
$|R_3(3/4)| = |f(3/4) - T_2(3/4)| \leq 27/128$.]

3 Je dána funkce $f(x) = (2x + 1) \ln x$.

a) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 1$. Tečnu načrtněte.

b) Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně dva se středem $x_0 = 1$ dané funkce f. Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 1/2$.

c) Napište, co vyjadřuje zbytek $R_3(x)$. Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$ a $R_3(1/2)$.

Výsledky: Derivace $f'(x) = 2\ln x + 2 + \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, $D(f) = D(f') = D(f'') = (0,\infty)$, tečna: $y = 3(x-1)$, $T_2(x) = 3(x-1) + \dfrac{1}{2}(x-1)^2$, $f(1/2) \doteq T_2(1/2) = -11/8$,

c) zbytek $R_3(x) = f(x) - T_2(x)$ vyjadřuje chybu (nepřesnost) při aproximaci funkční hodnoty $f(x)$ hodnotou $T_2(x)$, $f'''(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$, Lagrangeův tvar zbytku: existuje bod ξ ležící mezi $x_0 = 1$ a x, a to takový, že $R_3(x) = \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{2}{\xi^2} + \dfrac{2}{\xi^3}\right)\cdot(x-1)^3$, $R_3(1/2) = \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{2}{\xi^2} + \dfrac{2}{\xi^3}\right)\cdot(-\frac{1}{2})^3, \xi \in (1/2, 1)$.

V následujících úlohách je dána funkce f, stupeň n a body x_0, x_1.

a) Napište rovnici tečny ke grafu dané funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

b) Napište Taylorův polynom $T_n(x)$ dané funkce f se středem v bodě x_0.
Pomocí $T_n(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = x_1$ (ve tvaru zlomku).

c) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_{n+1}(x)$ a $R_{n+1}(x_1)$ pro tuto úlohu.
Pomocí $R_{n+1}(x_1)$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(x_1)$ z úlohy b).

4. Funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x-4}$, $n = 2$, $x_0 = 2, x_1 = 3/2$.

[Výsl.: derivace $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x-4}$, $D(f) = D(f') = (-\infty,\infty)$, $f'(2) = 2$, tečna: $y = 1 + 2(x-2)$, $f''(x) = 4\,\mathrm{e}^{2x-4}$, $f''(2) = 4$,
$T_2(x) = 1 + 2(x-2) + 2(x-2)^2$, $f(3/2) \doteq T_2(3/2) = 1/2$, $f'''(x) = 8\,\mathrm{e}^{2x-4}$,

$R_3(x) = \dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x-2)^3 = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{2\xi-4}}{3}(x-2)^3$, kde ξ leží mezi $x_0 = 2$ a x,

$R_3(3/2) = -\dfrac{\mathrm{e}^{2\xi-4}}{6}$, $\xi \in \langle 3/2, 2\rangle$, $|R_3(3/2)| = |f(3/2) - T_2(3/2)| \le 1/6$]

5. Funkce $f(x) = \ln(2x+1) - \dfrac{x}{2}$, $n = 2$, $x_0 = 0, x_1 = 1/2$.

Výsl.: a) Derivace $f'(x) = \dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{1}{2}$, $f''(x) = \dfrac{-4}{(2x+1)^2}$, $D(f) = D(f') = (-1/2, +\infty)$.

b) $f(0) = 0, f'(0) = 3/2$, rovnice tečny: $y = \dfrac{3}{2}x$.

c) $f''(0) = -4$, $T_2(x) = \dfrac{3}{2}x - 2x^2$, $f(1/2) \doteq T_2(1/2) = 1/4$.

d) $f'''(x) = \dfrac{16}{(2x+1)^3}$, $R_3(x) = \dfrac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = \dfrac{8}{3(2\xi+1)^3}x^3$, kde ξ leží mezi

$x_0 = 0$ a x, $R_3(1/2) = \dfrac{8}{3(2\xi+1)^3}\cdot\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{3(2\xi+1)^3}$, $\xi \in \langle 0, 1/2\rangle$

$|R_3(1/2)| = |f(1/2) - T_2(1/2)| \le 1/3$.

6. Funkce $f(x) = \ln(x+2)$, $n = 2$, $x_0 = -1, x_1 = -0.8$.

[Výsl.: Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $f''(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$,

$D(f) = D(f') = D(f'') = (-2,\infty)$, $T_2(x) = (x+1) - \dfrac{1}{2}(x+1)^2$,

$f(-0.9) \doteq T_2(-0.9) = 0.095$, $f'''(x) = \dfrac{2}{(x+2)^3}$,

$R_3(x) = \dfrac{1}{3(\xi+2)^3}(x+1)^3$, $R_3(-0.9) = \dfrac{1}{3(\xi+2)^3}\cdot\dfrac{1}{10^3}$, $\xi \in \langle -1, -0.9\rangle$.

$|R_3(-0.9)| = |f(-0.9) - T_2(-0.9)| \le 1/3000$.]

7. Funkce $f(x) = \sqrt{2x-1} - \dfrac{x^2}{3}$, $n = 2$, $x_0 = 1, x_1 = 3/2$

[Výsl.: Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} - \dfrac{2x}{3}$, $f''(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}} - 2/3$, $D(f) = \langle 1/2, \infty)$,

$D(f') = D(f'') = (1/2,\infty), T_2(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}(x-1) - \dfrac{5}{6}(x-1)^2$, $f(3/2) \doteq T_2(3/2) = 5/8$,

$f'''(x) = \dfrac{3}{\sqrt{(2x-1)^5}}$, $R_3(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{(2\xi-1)^5}}(x-1)^3$, $|R_3(3/2)| = |f(3/2) - T_2(3/2)| \le 1/16$.]