Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty: $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = f(t)$, **(N)**
kde koeficienty a_1, a_2 jsou daná reálná čísla, f je daná funkce.

Příslušná homogenní rovnice: $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = 0$. **(H)**
Neznámá (hledané řešení) v obou rovnicích je funkce x proměnné t, tj. $x(t)$.

Obecné řešení x rovnice (N) je funkce $x = x_h + x_p$.

Zde x_h je obecné řešení rovnice (H), které má tvar $x_h(t) = c_1\,\varphi_1(t) + c_2\,\varphi_2(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ libovolná čísla.

Funkce φ_1, φ_2 tvoří fundamentální systém (bázi) řešení rovnice (H). Jsou to dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (H).

Fundamentální systém určíme pomocí kořenů λ_1, λ_2 tzv. charakteristické rovnice. Je to kvadratická rovnice se stejnými koeficienty jako daná rovnice (H): $\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_2 = 0$.

Pro speciální tvar pravé strany určíme partikulární řešení x_p metodou odhadu.

Rovnice (N) s počátečními podmínkami $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \nu_0$, kde t_0, x_0, ν_0 jsou daná čísla se nazývá Cauchyova úloha.

Věta (o existenci a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy).
Je-li funkce f spojitá na intervalu J a $t_0 \in J$, pak Cauchyova úloha má právě jedno maximální řešení definované na J.

Poznámka. Pokud je neznámou funkce $y(t)$, pak rovnice (N) má tvar $\ddot{y} + a_1\,\dot{y} + a_2\,y = f(t)$. Toto značení je použito v textu Příklady ze zkouškových testů od L.Herrmanna (Web Ústavu technické matematiky, odkaz Matematika III).

V následujícíh úlohách je **dána nehomogenní rovnice**. Určete kořeny charakteristické rovnice a napište fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice (H). Navrhněte **tvar** partikulárního řešení dané nehomogenní rovnice.

1.a $\ddot{x} + 4x = 17\cos 2t$ **1.b** $\ddot{x} + 4x = (t-3)\cos t$ **1.c** $\ddot{x} + 4x = 5\mathrm{e}^{3t}\cos 2t$.

Výsledek. $\lambda_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$, fundament. systém (F.S.): $\{\cos 2t, \sin 2t\}$, partikulární řešení **pro 1.a**: $x_p = (A\cos 2t + B\sin 2t)\cdot \boldsymbol{t}$,
pro 1.b: $x_p = (At + B)\cos t + (Ct + D)\sin t$, **pro 1.c**: $x_p = A\mathrm{e}^{3t}\cos 2t + B\mathrm{e}^{3t}\sin 2t$.

2.a $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = t\,\mathrm{e}^{2t} - 5\sin 3t$. **2.b** $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = t^2\,\mathrm{e}^{3t}$. **2.c** $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = (2t+3) + \mathrm{e}^{t}$.

Výsledek. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, F.S.: $\{\mathrm{e}^{t}, \mathrm{e}^{3t}\}$, partikulární řešení **pro 2.a**: $x_p = (At + B)\,\mathrm{e}^{2t} + C\,\sin 3t + D\,\cos 3t$,
pro 2.b: $x_p = (At^2 + Bt + C)\,\mathrm{e}^{3t}\cdot \boldsymbol{t}$, pro **2.c**: $x_p = (At + B) + C\,\mathrm{e}^{t}\cdot \boldsymbol{t}$

3.a $\ddot{y} + 2\dot{y} = 8t\,\mathrm{e}^{2t}$. **3.b** $\ddot{y} + 2\dot{y} = t + 8\mathrm{e}^{2t}$. **3.c** $\ddot{y} + 2\dot{y} = 17 - \mathrm{e}^{-2t}$.

Výsledek. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, F.S.: $\{1, \mathrm{e}^{-2t}\}$, partikulární řešení **pro 3.a**: $y_p = (At + B)\,\mathrm{e}^{2t}$,
pro 3.b: $y_p = (At + B)\cdot \boldsymbol{t} + C\,\mathrm{e}^{2t}$, pro **pro 3.c**: $y_p = A\cdot \boldsymbol{t} + B\,\mathrm{e}^{-2t}\cdot \boldsymbol{t}$

4.a $\ddot{y} - 6y = 3 + \sin(\sqrt{6}\,t)$. **4.b** $\ddot{y} - 6y = 8\,\mathrm{e}^{-\sqrt{6}\,t} - 2t$.

Výsledek. $\lambda_1 = \sqrt{6}$, $\lambda_2 = -\sqrt{6}$, F.S.: $\{\mathrm{e}^{\sqrt{6}\,t}, \mathrm{e}^{-\sqrt{6}\,t}\}$, partikulární řešení **pro 4.a**: $y_p = A + B\sin(\sqrt{6}\,t) + C\cos(\sqrt{6}\,t)$,
pro 4.b: $y_p = A\,\mathrm{e}^{-\sqrt{6}\,t}\cdot \boldsymbol{t} + Bt + C$.

5.a $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$. **5.b** $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = (3-t)\cos t$.

Výsledek. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, F.S.: $\{\mathrm{e}^{-t}, t\cdot \mathrm{e}^{-t}\}$, partikulární řešení **pro 5.a**: $x_p = (At + B)\,\mathrm{e}^{-t}\cdot \boldsymbol{t}^2$,
pro 5.b: $x_p = (At + B)\cos t + (Ct + D)\sin t$.

6. Je dána lineární diferenciální rovnice 2. řádu $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 9\,\mathrm{e}^{2t}$.

a) Určete fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0$ a napište její obecné řešení.

b) Užitím metody odhadu určete partikulární řešení dané nehomogenní rovnice a zapište její obecné řešení.

c) Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro počáteční podmínky $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$.

Výsledky: a) Fundamentální systém řešení rovnice (H): $\{\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{2t}, \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\}$.
Obecné řešení rovnice (H): $y(t) = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{-t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$
b) Partikulární řešení: $y_p(t) = 3\,t\,\mathrm{e}^{2t}$, obecné řešení: $y(t) = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{-t} + 3\,t\,\mathrm{e}^{2t}$.
c) Maximální řešení Cauchyovy úlohy: $y(t) = 2\,\mathrm{e}^{-t} + 3\,t\,\mathrm{e}^{2t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

Stejné zadání a), b), c) pro následující Cauchyovy úlohy.

7. $\ddot{x} - 9x = \mathrm{e}^{3t},\ x(0) = 1/6,\ \dot{x}(0) = 2/3$

8. $\ddot{x} + x = \cos 2t,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1$

9. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 2\,\mathrm{e}^{-2t},\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$

10. $\ddot{x} + 4x = 5\,\sin 3t,$ pouze úlohy a), b).

Výsledky:

7. Obecné řešení: $x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{3t} + c_2\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{6}\,t\,\mathrm{e}^{3t},\ t \in (-\infty, +\infty), c_1,\ c_2 \in \mathbb{R},$ Cauchyova úloha: $c_1 = \frac{1}{6},\ c_2 = 0.$

8. Obecné řešení: $x(t) = c_1\,\cos t + c_2\,\sin t - \frac{1}{3}\cos 2t,\ t \in (-\infty, +\infty), c_1,\ c_2 \in \mathbb{R},$ Cauchyova úloha: $c_1 = \frac{1}{3},\ c_2 = 1.$

9. Obecné řešení: $x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-2t} + c_2\,t\mathrm{e}^{-2t} + t^2\,\mathrm{e}^{-2t},\ t \in (-\infty, +\infty), c_1,\ c_2 \in \mathbb{R},$ Cauchyova úloha: $c_1 = c_2 = 0.$

10. a) Fund. systém rovnice (H): $\varphi_1(t) = \cos 2t, \varphi_2(t) = \sin 2t,$ obecné řešení rovnice (H): $x_h(t) = C_1\,\cos 2t + C_2\,\sin 2t.$
b) $x_p(t) = -\sin 3t,$ obecné řešení $x(t) = C_1\,\cos 2t + C_2\,\sin 2t - \sin 3t,\ t \in (-\infty, +\infty)$

11. a) Je dána homogenní lineární diferenciální rovnice $\ddot{x}+4x = 0$. Určete fundamentální systém řešení a napište obecné řešení této rovnice. Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro počáteční podmínky $x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 1.$

b) Užitím metody odhadu určete partikulární řešení nehomogenní rovnice $\ddot{x} + 4x = 5\,\sin 3t$. Napište její obecné řešení.

Výsledky:
a) Fund. systém: $\varphi_1(t) = \cos 2t, \varphi_2(t) = \sin 2t,$ obecné řešení: $x_H(t) = C_1\,\cos 2t + C_2\,\sin 2t,$
řešení Cauchyovy úlohy: $x(t) = 2\,\cos 2t + \frac{1}{2}\,\sin 2t,\ t \in (-\infty, \infty),$

b) $x_p(t) = -\sin 3t,$ obecné řešení $x(t) = C_1\,\cos 2t + C_2\,\sin 2t - \sin 3t.$

Stejné zadání a), b) pro následující úlohu:

12. a) $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 0,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 5,$ b) $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 10\,\mathrm{e}^{2t}.$

Výsledky:
a) Fundamentální systém: $\{\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{2t},\ \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-3t}\}$. Obecné řešení: $x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{-3t}, t \in (-\infty, +\infty)$
Řešení Caychyovy úlohy: $x(t) = \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-3t},\ t \in (-\infty, +\infty).$
b) Partikulární řešení: $x_p(t) = 2\,t\,\mathrm{e}^{2t}$. Obecné řešení: $x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{-3t} + 2\,t\,\mathrm{e}^{2t},\ t \in (-\infty, +\infty)$

Doporučená literatura:

[1] Herrmann, L.: Obyčejné diferenciální rovnice – řady. Skriptum. Nakladatelství ČVUT 2006.
[2] Čipera, S.: Řešené příklady z Matematiky 3. Nakladatelství ČVUT 2008.
[3] Herrmann, L.: Matematika III - příklady ze zkouškových testů. Web Ústavu technické matematiky, odkaz Matematika III.