Autonomní soustavy (nelineárních) diferenciálních rovnic, n=2 (20. 1. 2019)
Jacobiova matice. Existence a jednoznačnost maximálního řešení Cauchyovy úlohy. Výpočet bodů rovnováhy. Určení rovnic fázových trajektorií dané soustavy.

Případné náměty k tomuto textu, upozornění na nesrovnalosti apod. sdělte laskavě F. Mrázovi
(e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Jedná se o soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\dot{x} = P(x,y),\ \dot{y} = Q(x,y) \qquad (*)$$

1. Je dána autonomní soustava $\dot{x} = x + y^2$, $\dot{y} = -x^2 - y$.

a) Ukažte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna fázová trajektorie této soustavy.

b) Vypočítejte všechny body rovnováhy.

c1) Určete rovnici fázových trajektorií. c2) Speciálně určete trajektorii, která prochází bodem $M = [0,3]$.

Řešení: a) Jacobiova matice $J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}, & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}, & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2y \\ -2x, & -1 \end{pmatrix}$ je spojitá v oblasti $G = \mathbb{E}_2$, což je postačující pro existenci a jednoznačnost fázové trajektorie při zadané počáteční podmínce (Cauchyova úloha).

b) Body rovnováhy určíme řešením soustavy rovnic
$P(x,y) = 0, \quad Q(x,y) = 0.$

Tyto body jsou též řešením dané soustavy diferenciálních rovnic, platí pro ně $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Specifičnost těchto řešení spočívá v tom, že to jsou jednobodové trajektorie.

V daném příkladě se jedná o soustavu dvou rovnic: $x + y^2 = 0, \qquad -x^2 - y = 0.$

Z první rovnice vyjádříme $x = -y^2$.
Po dosazení do druhé rovnice a násobení číslem (-1) získáme $y^4 + y = 0$,
kterou upravíme vytknutím na tvar: $y\,(y^3 + 1) = 0$.
její první řešení je $y_1 = 0$, kterému po dosazení do 1. rovnice odpovídá $x_1 = 0$ a tedy bod rovnováhy $A = [0,0]$.
Druhá rovnice má však ještě druhé řešení, a to $y_2 = -1$. Tomu po dosazení do 1. rovnice odpovídá $x_2 = -1$. Máme tedy druhý bod rovnováhy: $B = [-1,-1]$.

c) Protože $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, lze danou soustavu převést na jednu rovnici dělením levých a pravých stran:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x^2 - y}{x + y^2}$ v oblasti, kde $P(x,y) \neq 0$, nebo

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x + y^2}{-x^2 - y}$ v oblasti, kde $Q(x,y) \neq 0$.

Mimo bodů rovnováhy tedy v obou případech lze odstraněním zlomků upravit na *rovnici v diferenciálech* v anulovaném tvaru:

$$(x^2 + y)dx + (x + y^2)dy = 0.$$

Tato rovnice se nazývá *diferenciální rovnice pro trajektorie.*

V tomto příkladě se jedná o rovnici exaktní, neboť v oblasti G (která je jednoduše souvislá) je splněna podmínka $\dfrac{\partial}{\partial x}(x + y^2) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + y)$.

Řešením této rovnice jsou křivky (trajektorie) popsané v implicitním tvaru rovnicí:

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi(x,y) = konst.}}$$

Tomuto vyjádření, tj. rovnici fázových trajektorií se zpravidla říká *obecný integrál soustavy (*).*

Funkci $\Phi(x,y)$ určíme ze dvou podmínek

$$(1)\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = x^2 + y, \qquad (2)\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + y^2$$

Z první podmínky vypočteme integrováním podle x:

$$\Phi(x,y) = \int (x^2+y)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + xy + K(y).$$

Tuto funkci derivujeme podle y a dosadíme do druhé rovnice:

$$(2') \quad x + K'(y) = x + y^2.$$

Zde je **kontrolní místo** výpočtu. Vlastnost exaktní rovnice zaručuje, že v rovnici (2') už nezůstane x !

Je tedy $\qquad K'(y) = y^2 \Rightarrow K(y) = \int y^2 \mathrm{d}y = \dfrac{y^3}{3} + C$

Řešením dané soustavy jsou trajektorie popsané rovnicí: $\quad \dfrac{x^3}{3} + xy + \dfrac{y^3}{3} = C.$

Hodnotu konstanty C určíme dosazením souřadnic daného bodu M, pak $C = 9$.

Řešením dané Cauchyovy úlohy je fázová trajektorie popsaná implicitně rovnicí

$$\boxed{\boldsymbol{x^3 + 3xy + y^3 = 27}}$$

Poznámka. Podmínky (1) a (2) jsou stejné jako pro výpočet potenciálu $\Phi(x,y)$ vektorového pole $\overrightarrow{f} = (x^2+y, x+y^2)$.

Poznámka k terminologii. Funkci $\Phi(x,y)$ se zpravidla říká *první integrál soustavy (*).* V některých textech, např. ve Sbírce příkladů od S. Čipery, se prvním integrálem rozumí rovnice fázových trajektorií $\Phi(x,y) = konst.$

Poznámka. U některých soustav (*) je odpovídající diferenciální rovnice pro trajektorie nejenom exaktní, ale má i separovatelné proměnné. V takovém případě lze použít metodu separace proměnných.

2. Je dána nelineární autonomní soustava $\dot{x} = \dfrac{1}{y} - x,\ \dot{y} = y - 4x.$

a) Napište Jacobiovu matici. Určete a načrtněte všechny oblasti, jejichž body prochází právě jedna fázová trajektorie soustavy. Odpověď zdůvodněte !

b) Vypočítejte všechny body rovnováhy dané soustavy.

c1) Určete rovnici fázových trajektorií.
c2) Speciálně určete trajektorii, která prochází bodem $M = [2,1]$.

Výsledky (obměna příkladu 7.3.2 z textu [3] od L. Herrmanna):
a) Jacobiova matice je spojitá v $G_1 = (-\infty,\infty) \times (0,\infty)$ a v $G_2 = (-\infty,\infty) \times (-\infty,0)$.
b) dva body rovnováhy: $[1/2, 2], [-1/2, -2]$
c1) $2x^2 - xy + \ln|y| = C$, $C \in \mathbb{R}$, $\qquad$ c2) $2x^2 - xy + \ln y = 6$.

3. Je dána autonomní soustava $\dot{x} = x^2 - y^2$, $\dot{y} = -2x(y+1)$ a bod $M = [1,0]$.

Řešte úlohy a), b), c) jako v příkladu 1.

Výsledky (viz skriptum [2], řešený příklad 4.5 v odst. 4.3):
a) Jacobiova matice je spojitá v $\mathbb{E}_2$, $\quad$ b) tři body rovnováhy: $[0,0]$, $[1,-1], [-1,-1]$.
c) $x^2(y+1) - \dfrac{y^3}{3} = C$, $C \in \mathbb{R}$, $\qquad$ c2) $x^2(y+1) - \dfrac{y^3}{3} = 1$.

4. **! Nekonečně mnoho oblastí, nekonečně mnoho bodů rovnováhy a separovatelné proměnné.**

Je dána Cauchyova úloha $\quad \dot{x} = \operatorname{tg} y$, $\dot{y} = 1 - x^2$ s počáteční podmínkou $x(0) = 3$, $y(0) = \pi$.

Řešte úlohy a), b), c) jako v příkladu 2. Zde zadaná počáteční podmínka vyžaduje určit trajektorii, která prochází bodem $M = [0, \pi]$.

Výsledky. a) Jacobiova matice je spojitá v nekonečně mnoha oblastech (pásech) rovnoběžných s osou x: $G_k = \mathbb{R} \times ((2k-1)\,\pi/2, (2k+1)\,\pi/2)\,,\ k \in Z.$
b) nekonečně mnoho bodů rovnováhy: $\{[1,\, k\,\pi], [-1,\, k\,\pi],\, k \in Z\ \}$.
c1) Soustava vede k rovnici se separovatelnými proměnnými, výsledkem je rovnice fázových trajektorií
$x - \dfrac{x^3}{3} + \ln|\cos\, y| = C,\ C \in \mathbb{R}$, $\qquad$ c2) $x - \dfrac{x^3}{3} + \ln|\cos\, y| = 6.$

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Je dána autonomní soustava $\dot{x} = \dfrac{x}{1+y^2}, \quad \dot{y} = \dfrac{\pi}{4\cos^2 x} - \operatorname{arctg} y.$

Řešte úlohy a), b), c) jako v příkladu 2, bod $M = [\pi/4,\, 1]$.

Výsledky. a) Jacobiova matice je spojitá v nekonečně mnoha oblastech (pásech) rovnoběžných s osou y:

$G_k = ((2k-1)\,\pi/2, (2k+1)\,\pi/2) \times \mathbb{R},\ k \in Z,$

b) jediný bod rovnováhy $[0,\, 1]$.

c1) $x \operatorname{arctg} y - \dfrac{\pi}{4} \operatorname{tg} x = C,\ C \in \mathbb{R},$ c2) $x \operatorname{arctg} y - \dfrac{\pi}{4} \operatorname{tg} x = \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{\pi}{4} - 1\right).$

$\boxed{\mathbf{6.}}$ Je dána autonomní soustava $\dot{x} = y,\ \dot{y} = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$ a bod $M = [0, 1]$.

Řešte úlohy a), b), c) jako v příkladu 1.

Výsledky a) Jacobiova matice je spojitá v $\mathbb{E}_2$,

b) jediný bod rovnováhy $[0,\, 0]$.

c1) Soustava vede k rovnici se separovatelnými proměnnými, výsledkem je rovnice fázových trajektorií

$\dfrac{y^2}{2} + \sqrt{x^2+1} = C,\ C \in \mathbb{R},$ c2) $\dfrac{y^2}{2} + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{3}{2}.$