Diferenciální rovnice 2. řádu s proměnnými koeficienty (cvičení 10, 2018)

Cauchyova úloha: Diferenciální rovnice $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x)$,

s počátečními podmínkami $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$

Věty pro část b) dále uvedených úloh:

Věta o existenci a jednoznačnosti maximálního řešení

Věta o řešení ve tvaru mocninné řady

1. (Byl podrobně řešen při cvičení)

a) Pomocí násobení řad a vzorce pro součet konvergentní geometrické řady určete rozvoj funkce $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$. Stanovte interval konvergence této řady. Napište součet prvních čtyř nenulových členů rozvoje.

b) Napište postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy (pro funkci $y = y(x)$): $y'' + 3x^2\, y' = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$, $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

Ověřte jejich splnění a určete interval J tohoto maximálního řešení.

Ukažte, že existuje řešení úlohy ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě nula a určete interval konvergence I této řady.

c) Řešení úlohy aproximujte polynomem 4. stupně.

2. a) Určete rozvoj funkce $f(x) = \dfrac{4}{4-x^2}$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$. Stanovte interval konvergence této řady. Napište součet prvních tří členů rozvoje.

b) , c) jako v Př. 1 pro Cauchyovu úlohu $y'' + \dfrac{4}{4-x^2}\, y = \cos x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 4.$

Výsledky: a) $f(x) = \dfrac{4}{4-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} + ...,\ x \in (-2, 2)$, b) $J = (-2, 2),\ I = (-2, 2)$.

c) $y(x) \approx -2 + 4x + 3x^2/2 - 2x^3/3 - x^4/8,\ x \in (-2, 2)$

3. a) Určete rozvoj funkce $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$. Stanovte interval konvergence této řady. Napište součet prvních čtyř členů rozvoje.

b) , c) jako v Př. 1 (ale polynomem 5. stupně) pro Cauchyovu úlohu $y'' + y \sin x = \dfrac{1}{2-x}$, $y(0) = 1/4, \quad y'(0) = 1/8.$

Výsledky: a) $f(x) = \dfrac{1}{2-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + ...,\ x \in (-2, 2)$, b) $J = (-\infty, 2),\ I = (-2, 2)$.

c) $y(x) \approx 1/4 + x/8 + x^2/4 - 7x^5/960,\ x \in (-2, 2)$

4. (**řešený** př. 2.4.2. z textu [3] L. Herrmanna)

a) Určete rozvoj funkce $f(x) = \text{arctg} x$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$. Stanovte interval konvergence této řady.

b) , c) jako v Př. 1 pro Cauchyovu úlohu $y'' + x\, y = \text{arctg} x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

5. (**řešený** př. 2.4.3. z textu [3] L. Herrmanna)

a) Určete rozvoj funkce $f(x) = \ln(x+1)$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$. Stanovte interval konvergence této řady.

b) , c) jako v Př. 1 pro Cauchyovu úlohu $y'' + y\, \ln(x+1) = x + e^x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -1.$

Doporučená literatura:

[1] Herrmann, L.: Obyčejné diferenciální rovnice – řady. Skriptum. Nakladatelství ČVUT 2006.

[2] Čipera, S.: Řešené příklady z Matematiky 3. Nakladatelství ČVUT 2008.

[3] Herrmann, L.: Matematika III - příklady ze zkouškových testů. Web Ústavu technické matematiky, pak odkaz Matematika III.