Matematika III, cvičení. Dif. rovnice 1. řádu (separovatelná, lineární, Bernoulliova)

$\boxed{\textbf{1.}}$ Dána diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y\sqrt{x^2+1}}$.

a) Napište postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy pro tuto rovnici. Určete a načrtněte oblasti, ve kterých jsou tyto podmínky splněny.

b) Najděte obecné řešení této rovnice.

c) Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy s počáteční podmínkou $y(0) = 1$. Nezapomeňte na interval.

c2) ... poč. podmínka $y(0) = -2$, c3) ... poč. podmínka $y(3) = 1$.

[*Výsledky.* (Úloha byla řešena ve cvičení.) Rovnice separovatelná, a) dvě oblasti, c) $y = \sqrt[4]{x^2+1}$, $x \in (-\infty, \infty)$, c2) $y = -\sqrt{3+\sqrt{x^2+1}}$, $x \in (-\infty, \infty)$, c3) $y = \sqrt{1-\sqrt{10}+\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \left(\sqrt{10-2\sqrt{10}}, +\infty\right)$.]

Varianty zadání

1. Úloha a): Určete oblasti, v nichž jsou splněny postačující podmínky exist. a jednozn. maximálního řešení **dané Cauchyovy úlohy**.

2. V případě **lineární rovnice** může být v úloze a): Určete **interval**, na němž existuje řešení dané Cauchyovy úlohy.

3. Úloha b) není, je pouze úloha c)

Stejné zadání jako v příkladu 1 (resp. ve variantách) pro následující úlohy:

$\boxed{\textbf{2.}}$ Dána Cauchyova úloha $y' = \dfrac{y}{x}$, $y(-1) = -3$.

[*Výsledky.* Rovnice separovatelná i lineární, a) dvě oblasti, OŘ: $y = C\,x$, C.úloha: $y = 3x$, $x \in (-\infty, 0)$]

$\boxed{\textbf{3.}}$ Dána Cauchyova úloha $y' = \dfrac{3\cdot\sqrt[3]{(y+2)^2}}{x}$, c) $y(1) = -3$.

[*Výsledky.* a) čtyři oblasti ("kvadranty") s hraničními přímkami $x = 0$, $y = -2$, b) $y = -2 + (\ln|x| + C)^3$, c) $y = -2 + (\ln x - 1)^3$, $x \in (0, \mathrm{e})$!!!]

$\boxed{\textbf{4.}}$ Dány dvě Cauchyovy úlohy $y' + y\cdot\sin x = \sin x$, c1) $y(0) = 1$, c2) $y(\pi/2) = 0$.

[*Výsledky.* Rovnice separovatelná i lineární, a) jedna oblast $G = \mathbb{R}^2$, OŘ: $y = 1 - C\,\mathrm{e}^{\cos x}$ c1) $y = 1$, $x \in \mathbb{R}$, c2) $y = 1 - \mathrm{e}^{\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$]

$\boxed{\textbf{5.}}$ Dána Cauchyova úlohy $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\,\mathrm{tg}\,x$, $y(0) = -1$.

[*Výsledky.* Rovnice separovatelná i lineární, a) nekonečně mnoho oblastí, $G_k = (-\pi/2 + k\,\pi, \pi/2 + k\,\pi)$, $k \in Z$, interval max. řešení je $I = (-\pi/2, \pi/2)$, OŘ: $y = C/\cos x$, C.úloha: $y = -1/\cos x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$]

$\boxed{\textbf{6.}}$ Dány dvě Cauchyovy úlohy $y' = \dfrac{2xy^2}{4-x^2}$, c1) $y(1) = 1/\ln 3$, c2) $y(-3) = 0$.

[*Výsledky.* Separovatelné prom., a) tři oblasti s hraničními přímkami $x = -2$, $x = 2$,
b) $y = \dfrac{1}{\ln|4-x^2| - C}$
c1) $C = 0$, $y = \dfrac{1}{\ln(4-x^2)}$, $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$!!!, c2) $y = 0, x \in (-\infty, -3)$]

$\boxed{\textbf{7.}}$ Dána Cauchyova úloha (s lineární rovnicí) $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2 \sin x$, $y(\pi/2) = \pi$.

[*Výsledky.* $v = x^2, u = C - \cos x, y = (C - \cos x)\,x^2, C = 4/\pi,\ x \in (0, \infty)$]

$\boxed{\textbf{8.}}$ Dána Cauchyova úloha $y' - \dfrac{3}{2x}y = \sqrt{x^3}$, $y(4) = -16$.

[*Výsledky.* Lineární rovnice, a) jedna oblast, $G = (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$,
interval max. řešení je $I = (0, \infty)$, b) $v = \sqrt{x^3}$, $u = x + c$, $y = \sqrt{x^3}\,(x + c)$,
C. úloha: $y = \sqrt{x^3}\,(x - 6)$, $x \in (0, \infty)$]

$\boxed{\textbf{9.}}$ Dána Cauchyova úloha $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{4-2x}{x}$, $y(1) = 1$.

[*Výsledky.* Lineární rovnice, $v = x$, $u = C - \dfrac{4}{x} - 2\ln|x|$, $y = Cx - 4 - 2x\ln|x|$,
CU: $C = 5$, $y = 5x - 4 - 2x\ln x$, $x \in (0, +\infty)$)

$\boxed{\textbf{10.}}$ Dána Cauchyova úloha $y' + \dfrac{y}{x} = -x\,y^2$, $y(1) = 1$.

[*Výsledky.* Bernoulliova rovnice, $v = 1/x$, $u = \dfrac{1}{x+c}$, $y = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x+c}$ $x \in (-\infty, -C)$
nebo $x \in (-C, \infty)$,
C. úloha: $C = 0$, $y = 1/x^2$, $x \in (0, \infty)$]

$\boxed{\textbf{11.}}$ Dána Cauchyova úloha (s Bernoulliovou rovnicí) $y' + y\,\mathrm{tg}x = \dfrac{y^2}{\cos x}$, $y(0) = 1/2$.

[*Výsledky.* $v = \cos x$, $u = -\dfrac{1}{x+c}$, $y = -\dfrac{\cos x}{x+c}$,
CU: $C = -2$, $y = \dfrac{\cos x}{2-x}$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$)

$\boxed{\textbf{12.}}$ Dána diferenciální rovnice $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{2}{x} \cdot \sqrt{y}$.; Najděte obecné řešení.

[*Výsledky.* Bernoulliova rovnice, $v = \dfrac{1}{x^2}$, $u = \left(x + \dfrac{c}{2}\right)^2$, $y = \dfrac{1}{x^2}\left(x + \dfrac{c}{2}\right)^2$