Diferenciální rovnici 1. řádu je někdy vhodné zapsat ve tvaru tzv. rovnice v diferenciálech, tj.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

kde $M(x, y), N(x, y)$ jsou spojité funkce v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$.

Body z množiny $S = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; M(x, y) = 0 \text{ a } N(x, y) = 0\}$ se nazývají singulární body rovnice (1).

Na množině $G' = G - S$ uvažujme vektorové pole $\vec{r}(x, y) = (N(x, y), \, -M(x, y))$ (2)

Nazýváme ho směrovým polem rovnice (1). Integrální křivkou rovnice (1) pak rozumíme křivku v G', která má v každém svém bodě $[x, y]$ tečnu se směrovým vektorem (2). Je to hladká křivka, která neprochází žádným singulárním bodem.

Věta (Existence a jednoznačnost maximální integrální křivky)
Nechť funkce $M(x, y)$ a $N(x, y)$ jsou spojitě diferencovatelné v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$.
Pak každým bodem oblasti G, který není singulární, prochází právě jedna max. integrální křivka.

Speciální případem rovnice v diferenciálech je tzv. rovnice exaktní.
Rovnice (1) se nazývá exaktní v oblasti G, jestliže levá strana této rovnice je diferenciálem nějaké funkce $\Phi(x, y)$. To představuje splnění dvou podmínek

(P1) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$, (P2) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$,

Ty lze přepsat do jedné podmínky ve vektorovém tvaru: grad $\Phi = (M, N)$ na oblasti G.

Rovnice (1) je tedy exaktní v oblasti G, když vektorové pole $\vec{f} = (M, N)$ je potenciální na G.
Pro rozhodnutí, zda daná rovnice je exaktní, můžeme tedy použít následující kritérium (postačující podmínku) z předmětu Matematika II.

Věta. Jestliže M, N jsou spojitě diferencovatelné funkce v jednoduše souvislé oblasti G, ve které platí rovnost funkcí $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, pak je diferenciální rovnice (1) exaktní v G.

Jakmile určíme potenciál Φ vektorového pole $(M, \, N)$, pak rovnice $\Phi(x, y) = C$,
kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná (přípustná) konstanta, je tzv. obecný integrál dané exaktní rovnice (1). V implicitním tvaru tak poskytuje vyjádření všech integrálních křivek.

Věta. Každá maximální integrální křivka leží na vrstevnici (izokřivce) $\Phi(x, y) = C$, ze které vynecháme singulární body (pokud na vrstevnici leží).

Postup při řešení exaktní rovnice (1)
1. krok. Podle postačující podmínky ověříme, že daná rovnice je exaktní.

2. krok. Z podmínky (P1), a to integrováním podle x, vypočítáme $\Phi(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y)$.
Integrační konstanta je obecně závislá na y, proto je značena jako funkce $g(y)$.

3. krok. Vypočtenou funkci Φ derivujeme podle y a dosadíme do podmínky (P2).
V takto získané rovnici se vyruší všechny členy, které obsahují x. To představuje důležité "kontrolní místo" výpočtu, což je důsledek splněné postačující podmínky.

4. krok. V rovnici (P2) zůstává $g'(y)$ vyjádřená pomocí známé funkce proměnné y. Integrováním získáme funkci $g(y)$, kterou dosadíme do Φ. Takto určíme potenciál Φ, pomocí něhož zapíšeme obecný integrál $\Phi(x, y) = C$.

Poznámka. V popsaném algoritmu můžeme postupovat též tak, že úlohu proměnných x, y a podmínek (P1) a (P2) zaměníme. Ve 2. kroku tedy z podmínky (P2), a to integrováním podle y, vypočítáme $\Phi(x, y) = \int N(x, y)dy + g(x)$, atd...

Je-li zadána počáteční podmínka, tj. hledáme-li integrální křivku , která prochází daným bodem $[x_0, y_0]$, pak pro konstantu C platí: $C = \Phi(x_0, y_0)$.

Úlohy

1. Dána rovnice v diferenciálním tvaru $\left(y - \dfrac{1}{x+4}\right) dx + (x - 2y + 5)\, dy = 0$.
a) Určete její singulární body.
b) Ověřte postačující podmínky, aby daná rovnice byla exaktní.
Určete všechny oblasti, ve kterých jsou tyto podmínky splněny.
c) Najděte obecný integrál dané rovnice (tj. obecné vyjádření integrálních křivek v implicitním tvaru).
d) Určete integrální křivku, která prochází bodem $[-3, \, -1]$.

Řešení. a) Singulární body získáme řešením soustavy dvou rovnic

$$x - 2y + 5 = 0 \ \wedge y - \frac{1}{x+4} = 0.$$

Ze 2. rovnice vyjádříme $y = \dfrac{1}{x+4}$ a dosadíme do 1. rovnice.

Po úpravě obdržíme kvadratickou rovnici $x^2 + 9x + 18 = 0$. Její dva kořeny $x_1 = -3$, $x_2 = -6$ vedou ke dvěma singulárním bodům $A = [-3,\ 1]$, $B = [-6,\ -1/2]$.

b) Pro danou rovnici je $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(y - \frac{1}{x+4}\right)}{\partial y} = 1, \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial(x - 2y + 5)}{\partial x} = 1$. Rovnost tedy platí pro každé $x \in \mathbb{R}^2$, ale pozor na podmínku $x \neq -4$ z dané rovnice.

Daná rovnice je tedy exaktní ve dvou oblastech: $G_1 = (-\infty,\ -4) \times (-\infty,\ \infty)$, $\quad G_2 = (-4,\ \infty) \times (-\infty,\ \infty)$.

c) Postupujeme podle výše popsaných kroků 2 až 4, tj.

z podmínky (P1): $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = y - \dfrac{1}{x+4}$ vypočítáme $\Phi(x, y)$, a to integrováním podle x:

$$\Phi(x, y) = \int M(x, y) dx = \int \left(y - \frac{1}{x+4}\right) dx = xy - \ln|x+4| + g(y). \qquad (2)$$

Nalezenou funkci Φ derivujeme podle y a dosadíme do podmínky (P2), což vede k rovnici
$x + g'(y) = x - 2y + 5$. Kontrolní místo je splněno, neboť výrazy obsahující x se skutečně vyruší.
Získáme tak vyjádření $g'(y) = -2y + 5$. Integrováním obdržíme funkci $g(y) = \int(-2y + 5)\, dy = -y^2 + 5y$.

Dosadíme do (2) a dostaneme hledanou funkci $\Phi(x, y) = xy - \ln|x+4| - y^2 + 5y$.

Obecný integrál dané rovnice (tj. vyjádření integrálních křivek v implicitním tvaru):

$$xy - \ln|x+4| - y^2 + 5y = C.$$

d) Dosazaním $x = -3$, $y = -1$ určíme konstantu C z rovnice: $3 - \ln|1| - 1 - 5 = C$. Je tedy $C = -3$. Bodem $[-3,\ -1]$ prochází integrální křivka popsaná implicitně rovnicí
$xy - \ln(x+4) - y^2 + 5y + 3 = 0$, a to v oblasti G_2. Proto v jejím vyjádření nemusí být absolutní hodnota.

Úlohy k samostatnému počítání

2. Př. 3.5.1 a 3.5.2 z textu L. Herrmann: Příklady ze zkouškových testů. Web stránky předmětu MAT3.

3. Dána rovnice $\left(\dfrac{y^2}{x^3} - x\right) dx + \left(-\dfrac{y}{x^2} + \ln y\right) dy = 0$. Singulární body nehledejte. Je $M = [1,\ 1]$ singulární bod ?

Výsledky. Oblastí je 1. nebo 2. kvadrant. Obecný integrál: $\quad -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2x^2} + y\,(\ln y - 1) = C.\quad$ M není singulární bod.

4. Dána rovnice $x\,\mathrm{e}^{2y}\, dx + (x^2 + 1)\,\mathrm{e}^{2y}\, dy = 0$. Rozhodněte o singulárních bodech. Určete obecný integrál. Najděte integrální křivku procházející bodem $[3,\ 1]$.

Výsledky. Rovnice nemá singulární body (zdůvodněte). Jedna oblast, a to celé $\mathbb{R}^2$.
Obecný integrál: $\dfrac{1}{2}\,(x^2+1)\,\mathrm{e}^{2y} = C$. Integrální křivka: $\dfrac{1}{2}\,(x^2+1)\,\mathrm{e}^{2y} = 5\,\mathrm{e}^2$.

5. (řešen ve cvičení.) Dána diferenciální rovnice 1. řádu v diferenciálech: $2\cos x\,\cos y\,\mathrm{d}x + \left(\dfrac{y}{y+1} - 2\sin x\,\sin y\right) \mathrm{d}y = 0.$

a) Napište postačující podmínku, aby tato rovnice byla exaktní. Ověřte, že tato podmínka je splněna, určete největší možnou oblast(i).
b) Vyšetřete, zda body $[\pi/2, 0]$, $[\pi/4, 0]$ jsou singulárními body této rovnice.
c) Najděte obecný integrál dané diferenciální rovnice.
d) Najděte vyjádření integrální křivky, která prochází bodem $[\pi/4, 0]$.

6. Dána diferenciální rovnice 1. řádu v diferenciálech: $\quad x\,(y^2+1)\,\mathrm{d}x + \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} + x^2\,y\right) \mathrm{d}y = 0.$

a) Napište postačující podmínku, aby tato rovnice byla exaktní. Ověřte, že tato podmínka je splněna, určete největší možnou oblast(i). b) Daná rovnice nemá singulární body. Zdůvodněte !
c) Najděte obecný integrál dané diferenciální rovnice.
d) Najděte vyjádření integrální křivky, která prochází bodem $[-3, 0]$.
Výsledky. Jedna oblast, a to pás $G = (-\infty, +\infty) \times (-1,\ 1) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in (-1,\ 1)\}$.
Obecný integrál: $\dfrac{x^2}{2}\,(y^2+1) + \arcsin y = C$. Integrální křivka: $\dfrac{x^2}{2}\,(y^2+1) + \arcsin y = 9/2$.