Cvičení z MAT 3: Rozvoj funkce do mocninné (Taylorovy) řady. Obor konvergence. (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

A. Rozvojem funkce se rozumí následující úloha: Je dána funkce f a bod x_0. Najděte mocninnou řadu se středem x_0 tak, aby $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,(x-x_0)^k$ platilo na intervalu konvergence této řady, tj. pro $x \in (x_0 - R,\, x_0 + R)$.

Věta (viz skriptum [1]). Každá mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$ je Taylorovou řadou svého součtu.

I. Přímá metoda výpočtu hledaného rozvoje vychází z následující věty.

Věta (Rozvoj funkce v Taylorovu řadu). Nechť funkce f má spojité derivace libovolného řádu v intervalu $J = (x_0 - R, x_0 + R)$. Nechť pro každé $x \in J$ platí $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

Pak platí: $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$ pro každé $x \in J$.

Poznámka. $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, kde bod ξ leží mezi x_0 a x, je tzv. Lagrangeův tvar zbytku.

Postup při použití přímé metody:

1. Vypočteme obecnou, tj. n-tou derivaci dané funkce.
2. Sestavíme Taylorovu řadu a určíme interval konvergence.
3. Ověříme splnění postačující podmínky $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

Takto lze získat např. rozvoje funkcí e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^r$. Jsou to rozvoje se středem $x_0 = 0$, takovým se říká Mac Laurinovy. Rozvoje jsou uvedeny v textech [1], [2] a [3] doporučené literatury.

II. Nepřímé metody

II.1. Použití vzorce pro součet geometrické řady

$$\frac{a}{1-q} = \sum_{k=0}^{+\infty} a \cdot q^k, \quad \text{kde } |q| < 1 \tag{1}$$

Postup spočívá v úpravě dané funkce na tvar $\frac{a}{1-q}$, v němž q bude obsahovat výraz $(x - x_0)$.

Použití má zpravidla pro některé racionální lomené funkce, tj. tvaru $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy.

Příklad 1. Určete rozvoj funkce $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ do mocninné řady se středem $x_0 = 0$.

Řešení. Danou funkci upravíme na požadovaný tvar: $f(x) = \frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1-(-x)}$.

Porovnáním s výrazem $\frac{a}{1-q}$ vidíme, že $a = x^2$, $q = -x$. Podle vzorce (1) tak získáme rozvoj

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^2 \cdot (-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot x^{k+2}.$$

Z podmínky $|q| < 1$ získáme interval konvergence: $|q| = |-x| = |x| < 1$.

Vypočtený rozvoj tedy platí pro $x \in (-1,\, 1)$.

Poznámka. Obor konvergence je jen malá část definičního oboru, neboť ten je $D(f) = (-\infty,\, -1) \cup (-1,\, +\infty)$. Podobná situace nastává velmi často.

Příklad 2. Rozviňte funkci $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$ do mocninné řady se středem $x_0 = 0$.

Řešení. Danou funkci upravíme na požadovaný tvar: $f(x) = \frac{x}{3-x^2} = \frac{x}{3(1-\frac{x^2}{3})}$.

Porovnáním s výrazem $\frac{a}{1-q}$ vidíme, že $a = \frac{x}{3}$, $q = \frac{x^2}{3}$. Podle vzorce (1) tak získáme rozvoj

$$f(x) = \frac{x}{3-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{3} \cdot \left(\frac{x^2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{3^{k+1}}.$$

Zapíšeme podmínku pro interval konvergence: $|q| = \left|\dfrac{x^2}{3}\right| < 1$, tj. $|x| < \sqrt{3}$.

Nalezený rozvoj tedy platí pro $x \in (-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$.
Je to však opět jen malá část definičního oboru, neboť ten je $D(f) = (-\infty,\ -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3},\ \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},\ +\infty)$

Příklad 3. Určete rozvoj funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ do mocninné řady **se středem** $x_0 = 1$**.**

Řešení. Danou funkci upravíme na požadovaný tvar tak, aby se v něm ve jmenovateli vyskytoval výraz $(x-1)$: $f(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{(x-1)+1} = \dfrac{1}{1-(1-x)}$.
Porovnáním s výrazem $\dfrac{a}{1-q}$ vidíme, že $a = 1$, $q = 1-x$. Podle vzorce (1) tak získáme rozvoj

$$f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot (x-1)^k.$$

Zapíšeme podmínku pro interval konvergence: $|q| = |1-x| < 1$. Řešením je interval $I = (0,\ 2)$

Vypočtený rozvoj tedy platí pro $x \in (0,\ 2)$. Je to však jen malá část definičního oboru, neboť ten je $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

II.2. Použití známých rozvojů fukcí a algebraických operací (součet, součin), případně dosazení.

Příklad 4. Určete Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \sin 2x$ se středem $x_0 = 0$.

Řešení. Definiční obor je $D(f) = \mathbb{R}$. Použijeme Taylorův rozvoj funkce sinus, obsahuje pouze liché mocniny, tj. x^{2k+1}

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \text{ platí pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li $x := 2x$ do tohoto rozvoje, získáme rozvoj funkce $f(x) = \sin 2x$.

$$\sin 2x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \text{ platí též pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 5. Rozviňte funkci $f(x) = x \cdot \cos x + \sin 2x$ do mocninné řady se středem $x_0 = 0$.

Řešení. Definiční obor je $D(f) = \mathbb{R}$. Použijeme vlastnosti mocninných řad. Na oboru konvergence lze mocninné řady sčítat člen po členu, totéž platí pro násobení číslem. Taylorův rozvoj funkce kosinus obsahuje právě všechny sudé mocniny, tj. x^{2k} a má tvar

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \text{ platí pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Danou funkci pak lze rozvinout do řady takto:

$$f(x) = x \cdot \cos x + \sin 2x = x \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Podle zmíněné vlastnosti součtu a násobku tak získáme rozvoj

$$f(x) = x \cdot \cos x + \sin 2x = \sum_{k=0}^{+\infty} \left((-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k)!} + (-1)^k \cdot \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right), \text{ který platí pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Výsledek je možno upravit, např. takto:

$$f(x) = x \cdot \cos x + \sin 2x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{2k+1+2^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

s oborem konvergence $\mathbb{R}$.

Příklad 6. Určete začátek do mocniny x^3 z rozvoje funkce $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ do mocninné řady se středem $x_0 = 0$.

Řešení. Definiční obor je $D(f) = \mathbb{R}$. Danou funkci přepíšeme do tvaru součinu dvou funkcí: $f(x) = e^x \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$.
Hledaný rozvoj pak získáme součinem dvou mocninných řad. Pro první z nich použijeme známý vztah

$e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, který platí pro každé $x \in R$. Rozvoj druhé funkce určíme pomocí geometrické řady (ověřte si):

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot x^{2k},\ x \in (-1,\ 1).$$

Obě řady konvergují absolutně na intervalu $(-1,\ 1)$. Výpočtem jejich součinu získáme řadu, která na tomto intervalu konverguje a její součet je roven zadané funkci $f(x)$.

Pro stanovení začátku rozvoje do mocniny x^3 stačí násobit několik počátečních členů z obou rozvojů součinu. Počítáme tedy jako při násobení dvou polynomů, přičemž členy s exponentem vyšším než tři neuvažujeme:

$$f(x) = \mathrm{e}^x \cdot \frac{1}{1+x^2} = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ...)(1 - x^2 + ...) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - x^2 - x^3 + ...$$

Závěr (po úpravě): $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^3}{6} + ...,\ x \in (-1,\,1).$

II.3. Použití známých rozvojů fukcí a operací derivování a integrování mocninné řady člen po členu.

Příklad 7. $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 0.$ **Vyřešen v Př. 5.18, skriptum [2], S. Čipera**, řešen též v textu [4].

[*Výsl.* $\cdot \sum \ (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1},\ x \in (-1,1)$, navíc: konvergence relativní v krajních bodech]

Příklad 8. $f(x) = \ln(1+x^2),\ x_0 = 0,$ (řešen ve cvičení).

Příklad 9. $f(x) = \ln(1+x),\ x_0 = 0.$ Postup analogický jako v příkladu 7, částečně vyřešen v [4].

[*Výsl.* $\cdot \sum \ (-1)^k \dfrac{x^k}{k},\ x \in (-1,1)$, navíc: konvergence relativní v bodě $x = 1$]

B. Uveďme jeden příklad úlohy "obrácené". Jedná se o **vyšetření konvergence zadané mocninné řady.**

Příklad. 10. Je dána řada (příklad zadaný ve cvičení) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-4)^k}{3^k \cdot \sqrt{2k+1}}$

a) Určete interval konvergence I a poloměr konvergence R. b) Vyšetřete konvergenci v krajních bodech intervalu I.
c) Napište interval absolutní konvergence a intervaly divergence dané řady. Zakreslete na číselné ose.

Řešení. a) Pro výpočet intervalu konvergence použijeme d'Alembertovo kritérium.

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}(x-4)^{k+1}}{3^{k+1}\cdot\sqrt{2k+3}} \cdot \frac{3^k\cdot\sqrt{2k+1}}{(-1)^k(x-4)^k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{|x-4|\sqrt{2k+1}}{3\cdot\sqrt{2k+3}} =$$

$= \dfrac{|x-4|}{3} \cdot \lim_{k\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2k+1}{2k+3}} = \dfrac{|x-4|}{3} \cdot 1.$ Z podmínky pro absolutní konvergenci, tj. $\dfrac{|x-4|}{3} < 1$ získáme $|x-4| < 3$.
Interval konvergence je $I = (1,\,7)$, poloměr konvergence je $R = 3$.

b1) Do zadané řady dosadíme $x = 1$. Získáme tak číselnou řadu, jejíž k-tý člen je

$a_k = \dfrac{(-1)^k\cdot(-3)^k}{3^k\cdot\sqrt{2k+1}} = \dfrac{3^k}{3^k\cdot\sqrt{2k+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}.$ Číselná řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ je divergentní, neboť je srovnatelná s divergentní Dirichletovou řadou $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$. Ověřte si pomocí limitního srovnávacího kritéria.

b2) Do zadané řady dosadíme $x = 7$. Získáme tak číselnou řadu, jejíž k-tý člen je

$b_k = \dfrac{(-1)^k\cdot 3^k}{3^k\cdot\sqrt{2k+1}} = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}.$ Číselná řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$ je alternující řadou. Nekonverguje absolutně, neboť řada absolutních hodnot jejích členů, tj. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ diverguje - viz řada v b1).

Případnou relativní konvergenci potvrdíme, jsou-li splněny předpoklady Leibnizova kritéria pro alternující řadu. Označíme-li $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$, pak platí

1. $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0,$ 2. Pro každé $k \in N$ je $\dfrac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$, tedy $a_{k+1} < a_k$. Posloupnost $\{a_k\}$ je klesající. Tímto jsme potvrdili, že pro $x = 7$ daná mocninná řada konverguje relativně.

Závěr. Interval absolutní konvergence dané řady je $(1,\,7)$. Řada diverguje pro $x \in (-\infty,\,1\rangle \cup (7, +\infty)$. Pro $x = 7$ řada konverguje relativně.

Doporučená literatura:

[1] Herrmann, L.: Obyčejné diferenciální rovnice – řady. Komentované přednášky. Nakladatelství ČVUT 2006.
[2] Čipera, S.: Řešené příklady z Matematiky 3. Nakladatelství ČVUT 2008.
[3] Kračmar, S.: Stručné texty k přednášce na webové stránce předmětu Matematika III. Ústav technické matematiky.
[4] Herrmann, L.: Příklady ze zkouškových textů. Web stránky předmětu MAT III.

Poznámka: V textech [1] a [2] lze nalézt další příklady k výše uvedeným úlohám.