Cvičení z MAT 3: Číselné řady. Integrální a Limitní srovnávací kritérium. Taylorův polynom
(pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz )

Při vyšetřování konvergence číselné řady $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ přichází v úvahu Integrální nebo Limitní srovnávací kritérium zpravidla tehdy, když $a_k$, tj. $k$-tý člen dané řady neobsahuje výrazy s faktoriálem a neobsahuje ani $k$ v exponentu.

**Limitní srovnávací kritérium** je vhodné v případě, že $k$-tý člen $a_k$ dané řady obsahuje podíl polynomů nebo podíl odmocnin z polynomů. Danou řadu pak srovnáme s Dirichletovou řadou $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$, kde $b_k = \frac{1}{k^\alpha}$. Parametr $\alpha$ určíme tak, aby v podílu $\frac{a_k}{b_k}$ (po úpravě na jednoduchý zlomek) byly v čitateli i jmenovateli polynomy stejného stupně. Potom bude $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} \in (0,\infty)$. Podle Limitního srovnávacího kritéria pak buď obě uvažované řady konvergují, nebo obě divergují.

Použití **integrálního kritéria** vyžaduje výpočet nevlastního integrálu $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(k) = a_k$, proto si ho připomeňme. Definice Riemannova integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ předpokládá, že interval $\langle a,b\rangle$ je omezený a funkce $f$ je v něm omezená. Pokud tento předpoklad není splněn, pak Riemannův integrál neexistuje. Přesto mohou nastat situace, ve kterých je vhodné se takovým integrálem zabývat. Pro integrální kritérium se jedná o situaci intervalu $\langle a,+\infty)$. Při výpočtu nevlastního integrálu pak můžeme postupovat podle Věty z odstavce V.6.6. ze skripta Matematika I od J. Neustupy. Uvedená věta má pro tento případ následující tvar:

**Věta IV.6.6.** Nechť funkce $f$ je spojitá v intervalu $\langle a,+\infty)$. Potom existuje (nevlastní) integrál $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$, kde $F$ je primitivní funkce k funkci $f$ v intervalu $\langle a,+\infty)$.

**Příklad.** Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^4+1}$

**Řešení. 1. možnost - integrální kritérium.** Pro jeho použití uvažujme funkci $f: f(x) = \frac{x}{x^4+1}$. Tedy takovou, že $k$ -tý člen řady, tj. $a_k = \frac{k}{k^4+1}$ je roven $f(k)$. Tato funkce $f$ je spojitá, nezáporná a klesající na intervalu $\langle 1,+\infty)$, splňuje tedy předpoklady integrálního kritéria.

Primitivní funkci vypočteme pomocí substituce: $x^2 = t$, $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}(x^2) + C.$$

Existuje tedy nevlastní integrál $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}(x^2)\right) - \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$

**Závěr.** Daná číselná řada konverguje, protože odpovídající nevlastní integrál konverguje (má konečnou hodnotu).

**2. možnost - limitní srovnávací kritérium.**

Označme $a_k = \frac{k}{k^4+1}$, $b_k = \frac{1}{k^\alpha}$. Potom $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k}{k^4+1}\cdot\frac{k^\alpha}{1} = \frac{k^{\alpha+1}}{k^4+1}$.

Porovnáním stupňů polynomů v čitateli a ve jmenovateli získáme rovnici $\alpha+1=4$ a tedy hledaná hodnota $\alpha = 3$. Daná řada $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^4+1}$ proto konverguje, neboť je srovnatelná s konvergentní Dirichletovou řadou $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

**Úloha.** Rozhodněte o konvergenci dané řady. *Nápověda:* Použijte integrální nebo limitní srovnávací kritérium.

Př. 1: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ Př. 2: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{k^2+4}$ Př. 3: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^2+4}$

Př. 4: $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k}$ Př. 5: $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\cdot\ln k}$ Př. 6: $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\cdot\ln^2 k}$

**Výsledky:**

Př. 1. Řada konverguje, je to Dirichletova řada, v níž $\alpha = 3/2$. Nebo integrální kritérium, v němž $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

Existuje nevlastní integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{1}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 2.$

Př. 2. Řada konverguje. Srovnání s Dirichletovou řadou, v níž $\alpha = 2$. Nebo integrální kritérium, v němž $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

Existuje nevlastní integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} 1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = 3\pi/8.$

Př. 3. Řada diverguje. Srovnání s Dirichletovou řadou, v níž $\alpha = 1$. Nebo integrální kritérium, v němž $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$.

Existuje nevlastní integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\ln 5 = +\infty.$

Př. 4. Řada diverguje. Integrální kritérium, v němž $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Existuje nevlastní integrál $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln^2 x - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 = +\infty.$

Př. 5. Řada diverguje. Integrální kritérium, v němž $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln x) + C$.

Existuje nevlastní integrál $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) = +\infty.$

Př. 6. Řada konverguje. Integrální kritérium, v němž $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\ln x} + C$.

Existuje nevlastní integrál $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln 2}.$

**Doporučená literatura**:


[1] Herrmann, L.: Obyčejné diferenciální rovnice – řady. Komentované přednášky. Nakladatelství ČVUT 2006.
[2] Čipera, S.: Řešené příklady z Matematiky 3. Nakladatelství ČVUT 2008.


**Poznámka:** V těchto textech lze nalézt varianty k výše uvedeným úlohám.

---

**Připomenutí základních znalostí z MAT I o Taylorově polynomu** pro řešení úlohy: napište rozvoje dané funkce do mocninné řady (3. cvičení).

**Předpoklad:** Funkce $f$ má derivace až do řádu $n$ v bodě $x_0$.
Pak Taylorův polynom $n$-tého stupně dané funkce $f$ (se středem) v bodě $x_0$:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Lagrangeův tvar zbytku $R_n(x)$ vyjadřuje chybu (nepřesnost), které se dopustíme při nahrazení funkční hodnoty $f(x)$ hodnotou $T_n(x)$, tj. $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

**Věta ( Taylorova).** Nechť funkce $f$ má spojité derivace až do řádu $n+1$ v okolí $U(x_0)$ bodu $x_0$.

Pak pro každé $x \in U(x_0)$ existuje mezi body $x_0$ a $x$ bod $\xi$ tak, že $\displaystyle R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Protože přesnou polohu bodu $\xi$ zpravidla neznáme, můžeme zmíněnou nepřesnost pomocí tvaru zbytku pouze odhadnout shora. Lze použít odhad $\displaystyle |R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, kde $M_{n+1}$ je maximum funkce $|f^{(n+1)}|$ na intervalu $\langle x_0, x\rangle$, resp. $\langle x, x_0\rangle$.

**Věta ( Rozvoj funkce v Taylorovu řadu).** Nechť funkce $f$ má spojité derivace libovolného řádu v intervalu $J = (x_0 - R, x_0 + R)$. Nechť $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ pro každé $x \in J$.

Pak platí: $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ pro každé $x \in J$.