

Integrály vybrané z úloh v MAT III

Případné náměty či upozornění na nesrovnalosti sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Pro danou funkci f vypočítejte integrál $\int f(x) dx$, resp. $\int f(y) dy$. Určete intervaly, na nichž integrál existuje. V hranatých závorkách je uveden výsledek.

1. $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2}$ [$\frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{3x} + C$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$]
2. $f(x) = \frac{x}{x+2}$ [$x - 2 \ln|x+2| + C$, $x \in (-\infty, -2)$, $x \in (-2, +\infty)$]
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(y+4)^2}}$ [$3 \cdot \sqrt[3]{y+4} + C$, $y \in (-\infty, -4)$, $y \in (-4, +\infty)$]

Integrace per-partes

4. $f(x) = (4 - 3x)e^x$ [$(7 - 3x)e^x + C$, $x \in (-\infty, \infty)$]
5. $f(x) = \ln x$ [$x \ln x - x + C$, $x \in (0, \infty)$]
6. $f(x) = x^2 \ln x$ [$\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$, $x \in (0, \infty)$]

Integrace substitucí

7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ [$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3} + C$, $x \in (-\infty, \infty)$]
8. $f(y) = \frac{\ln y}{y}$ [$\frac{1}{2} \ln^2 y + C$, $y \in (0, +\infty)$]
9. $f(y) = \frac{1}{y \ln y}$ [$\ln|\ln y| + C$, $y \in (0, 1)$, $y \in (1, +\infty)$]
10. $f(x) = x e^{x^2+1}$ [$\frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$, $x \in (-\infty, \infty)$]
11. $f(x) = \sin x \cdot e^{\cos x}$ [$-e^{\cos x} + C$, $x \in (-\infty, \infty)$]
12. $f(x) = \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1}$ [$\frac{1}{4} \ln^2(x^2+1) + C$, $x \in (-\infty, \infty)$]
13. $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}$ [$\frac{1}{2} \ln(\ln(x^2+1)) + C$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$]

Integrály typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ řešíme substitucí $f(x) = t$

14. $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ [$-\ln|\cos x| + C$, $x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$]
15. $f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ [$\ln|\sin x| + C$, $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$]

Integrály při řešení exaktní diferenciální rovnice, resp. soustavy nelineárních diferenciálních rovnic.

Ve výsledku uvedená funkce $C(x)$, resp. $C(y)$ je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné.

16. $\int y \ln(1+x^2) dy$ [$\frac{1}{2} y^2 \ln(1+x^2) + C(x)$]
17. $\int \frac{x y^2}{1+x^2} dx$ [$\frac{1}{2} y^2 \ln(1+x^2) + C(y)$]
18. $\int \frac{x}{1+y^2} dy$ [$x \cdot \operatorname{arctg} y + C(x)$]
19. $\int \left(\frac{\pi}{4 \cos^2 x} - \operatorname{arctg} y \right) dx$ [$\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x - x \cdot \operatorname{arctg} y + C(y)$]

Doporučená literatura

- [1] J. Neustupa: *Matematika I*, Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha 2017 (též 2014 ...)
- [2] S. Čipera: *Řešené příklady z Matematiky 3*, Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha 2008
- [3] S. Kračmar, F. Mráz, J. Neustupa: *Sbírka příkladů z Matematiky I*, Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha 2017 (též 2014 ...)