

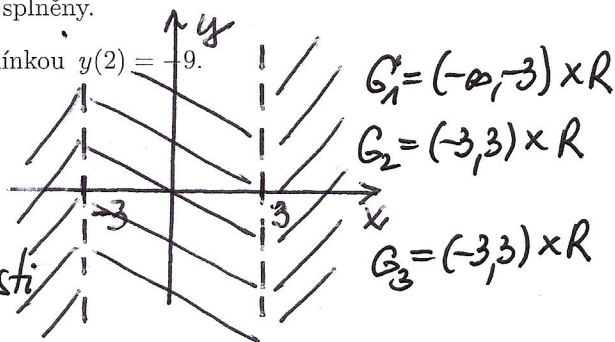
1. Dána diferenciální rovnice 1. řádu $y' = \frac{2x(y-1)}{x^2-9}$ (1)

a) Napište postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy pro tuto rovnici. Určete a načrtněte oblasti, ve kterých jsou tyto podmínky splněny.

b) Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy s počáteční podmínkou $y(2) = -9$.

c) Určete maximální řešení pro počáteční podmínku $y(2) = 1$.

a) Spojitosť fce $f(x,y) = \frac{2x(y-1)}{x^2-9}$
a fce $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{x^2-9}$ na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$
to je splněno, když $x \neq \pm 3 \Rightarrow 3$ oblasti



b) lze separovat proměnné rovnici (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y-1)}{x^2-9} \quad \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{2x}{x^2-9} dx, \text{ kde } y-1 \neq 0$$

Integrace

$$\ln|y-1| = \ln|x^2-9| + C \quad (2)$$

To je obecný integrál rovnice (1)
(v implicitním tvaru)

Dosažením $x_0 = 2, y_0 = -9$ máme C:

$$\ln 10 = \ln 5 + C, C = \ln 10 - \ln 5 = \ln 2$$

Získáme řešení Cauchyovy úlohy (v impl. tvaru):

$$\ln|y-1| = \ln|x^2-9| + \ln 2, \text{ po úpravě napravo:}$$

$$\ln|y-1| = \ln(2|x^2-9|), \text{ v oblasti } G_2 \text{ (včetně bodu } (2, -9))$$

$$|y-1| = 2 \cdot |x^2-9|, \text{ je } x^2-9 < 0, \text{ tedy } |x^2-9| = 9-x^2$$

$$\text{pak } y-1 = (\pm 2) \cdot (9-x^2)$$

Z poč. podm. $y(2) = -9$ máme, že platí $\ominus$

$$\text{Řešení Cauchyovy úlohy: } \begin{cases} y = 1 - 2(9-x^2) \\ x \in (-3; 3) \end{cases} \text{ interval pro } x \text{ plyne opět z poč. podm., kde } x_0 = 2$$

Poznámka

Obecně řešení rovnice (1) lze z implicitního tvaru (2) získat d'pravením; pro libovolné C řešíme ve tvaru $\ln C, C > 0$.

$$\ln|y-1| = \ln|x^2-9| + \ln C, C > 0$$

$$\ln|y-1| = \ln(C \cdot |x^2-9|)$$

$$|y-1| = C \cdot |x^2-9|$$

Využijeme toho, že $|A| = |B| \Leftrightarrow$

$$A = B \text{ nebo } A = -B$$

$$y-1 = (\pm C) \cdot (x^2-9)$$

tedy $y = 1 + K(x^2-9)$, kde $K \neq 0$ je libov. číslo

K tomu ještě $y = 1$ (konst. fce je již řešením)

lze zapísat ve tvaru

$$y = 1 + K(x^2-9), K \text{ libovolné číslo}$$