1. [6 bodů] a) Určete rozvoj funkce $g(x) = \frac{1}{2-x}$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$. Stanovte interval konvergence této řady. Napište součet prvních čtyř nenulových členů rozvoje.

b) **Zdůvodněte**, že Cauchyova úloha (pro funkci $y = y(x)$):

$$y'' + \frac{1}{2-x}\,y = \cos x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

má jediné maximální řešení a určete interval J tohoto maximálního řešení.
Ukažte, že existuje řešení úlohy ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě nula a určete interval konvergence I této řady.

c) Řešení úlohy aproximujte polynomem 4. stupně.

(a) $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \left\{\begin{matrix} a = 1/2 \\ q = x/2 \end{matrix}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots$

konvergence: $|q| = \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow$ interval pro $x \in (-2;2)$

(b) Odpověď získáme z věty O existenci a jednozn. max. řešení a z věty O vyjádření řešení pomocí mocninné řady (viz text s příklady na webu M3)

Postačující pro existenci .... je spojitost funkcí $p(x) = 0$; $q(x) = \frac{1}{2-x}$; $f(x) = \cos x$ na intervalu, který obsahuje počát. hodnotu $x_0 = 0 \Rightarrow J = (-\infty; 2)$

Postačující pro řešení ve tvaru řady je rozvinutelnost fcí p, q, f do mocninné řady se středem $x_0 = 0$: $f(x) = \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $x \in R$, rozvoj $q(x)$ je v a) $\Rightarrow I = (-2;2)$

(c) Řešení má tvar $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$

pak $y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots$

z počát. podm. získáme: $y(0) = \boxed{c_0 = 2}$; $y'(0) = \boxed{c_1 = -1}$

pak $y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + \dots$

začátek rozvoje funkce $\frac{1}{2-x} \cdot y = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \dots\right) \cdot (2 - x + c_2 x^2 + \dots) =$ do mocniny x^2: $= \dots = 1 + \frac{1}{2} c_2 x^2$

Po dosazení do dané rovnice: $2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + 1 + \frac{1}{2} c_2 x^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$

(*) Porovnáním koeficientů u mocnin x^0, x^1, x^2 obou stran obdržíme soustavu rovnic pro neznámé c_2, c_3, c_4:

$$\left.\begin{matrix} 2c_2 + 1 = 1 \\ 6c_3 = 0 \\ 12 c_4 + \frac{1}{2} c_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} c_2 = 0, c_3 = 0 \\ c_4 = -1/24 \end{matrix}$$

Závěr: $y(x) = 2 - x - \frac{1}{24} x^4$, $x \in (-2;2)$

	x^0	x^1	x^2
y''	$2c_1$	$6c_3$	$12c_4$
$\frac{1}{2-x} y$	1	0	$\frac{1}{2}c_2$
$\cos x$	1	0	$-1/2$

(*) Porovnání koeficientů můžeme zapsat do tabulky, ze které sestavíme stejnou soustavu